УДК 372.851

ОРГАНИЗАЦИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

Романов П.Ю.[1]

[1]*ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова», Магнитогорск, Магнитогорск, e-mail: romanov-magu@mail.ru.*

В статье предлагается методика обучения учащихся решению уравнений с параметрами на основе исследования вида уравнения. Разработанная автором система задач, предъявляемая в строго определенной последовательности, способствует организации деятельности учащихся по выделению алгоритма решения данных уравнений. По мере усложнения квадратных уравнений с параметрами и уравнений, к ним сводимым, алгоритм их решения корректируется и совершенствуется. При этом анализ способов решения уравнений позволяет выделить приемы поиска контрольных значений параметров, существенно облегчающих решение и позволяющих избежать громоздких математических вычислений. Деятельность учащихся при решении постоянно усложняющихся уравнений по своей структуре и содержанию соответствует исследовательской деятельности, формируя исследовательские умения учащихся и подготавливая учащихся к дальнейшему профессиональному образованию.

Ключевые слова: исследовательская деятельность, задачи с параметрами, контрольные значения параметра.

THE ORGANIZATION OF RESEARCH ACTIVITY OF STUDENTS IN THE LEARNING PROCESS OF SOLVING EQUATIONS WITH A PARAMETER

Romanov P.Y.[1]

[1]*NMSTU Nosov Magnitogorsk state technical university, Magnitogorsk, e-mail: romanov-magu@mail.ru.*

The article suggests methods of teaching students solving equations with parameters based on the study of the equation. The author developed the system of tasks presented in a strict sequence, helps to organize the activities of students on the allocation algorithm is the solutions to these equations. As the complexity of quadratic equations with parameters and equations reducible to them an algorithm of their solution is adjusted and improved. The analysis of the solutions of the equations allows to highlight the techniques of search control parameter values, simplifies the solution and allows to avoid cumbersome mathematical calculations. Activities of students in solving increasingly complex equations on the structure and content of the relevant research, forming research skills of students and preparing students for further professional education.

Key words: research activities, tasks with parameters the control parameter values.

В современных условиях обучения по новым Госстандартам образования, внедрения компетентностного подхода все большее внимание должно уделяться развитию способностей учащихся, формированию специалиста, готового применять и добывать знания. Отметим, что в педагогической науке разработаны различные подходы к организации процесса формирования умений исследовательской деятельности и его содержанию. Нами предпринята попытка организовать исследовательскую деятельность учащихся в процессе решения задач с параметрами.

Задачи с параметрами уверенно вошли в материалы Государственной итоговой аттестации и Единого государственного экзамена по математике. Их решение вызывает немалые трудности у учащихся, которые могут быть объяснены отсутствием в ныне действующих учебниках четких методических указаний по решению задач данного класса.

Приведем примеры систем заданий по теме «Квадратные уравнения с параметрами».

Изучение данной темы необходимо начать с рассмотрения неполных квадратных уравнений с параметрами, позволяющими осуществлять аналитическую деятельность.

Задание 1. При всех значениях параметра *a* решить уравнения:

1) $ax^2 = 0,$

2) $(a-2)(x-1)^2 = 0,$

3) $\left(3-\sqrt{a}\right)\cdot x^2 = 0,$

4) $\left(\sqrt{a}-5\right)\cdot(x-1)^2 = 0,$

Далее переходим к решению приведенных квадратных уравнений, числовое значение дискриминанта которых представляет собой квадрат целого числа.

Задание 2. При всех значениях параметра *a* решить уравнение $x^2 + 5ax = 14a^2.$

$$x^2+5ax-14a^2=0,\ D=25a^2+56a^2=81a^2,$$

$$x=\frac{-5a\pm\sqrt{81a^2}}{2},\ x=\frac{-5a\pm|9a|}{2}=\left[\begin{array}{l}-7a,\\2a.\end{array}\right.$$

Ответ: при всех действительных значениях параметра a уравнение имеет корни $x=-7a$ и $x=2a.$

Задание 3. При всех значениях параметра *a* решить уравнения:

1) $x^2 = -6ax - 8a^2,$

2) $x^2 - 18a^2 = 3ax,$

3) $x^2 + 8ax + 7a^2 = 0,$

4) $x^2 - 15a^2 = 2ax.$

Следующим этапом решения квадратных уравнений с параметром является решение уравнений, дискриминант которых есть полный квадрат некоторого двучлена.

Задание 4. При всех значениях параметра *a* решить уравнение $x^2+(4-2a)x=8a.$

$$x^2+(4-2a)x-8a=0,\ x^2+2(2-a)x-8a=0,$$

$$\frac{D}{4}=(2-a)^2+8a=(a+2)^2,$$

$$x=(a-2)\pm|a+2|,\quad x=\left[\begin{array}{l}a-2+a+2=2a,\\a-2-a-2=-4.\end{array}\right.$$

Ответ: при всех действительных значениях параметра a уравнение имеет корни $x=2a$ и $x=-4.$

Анализ решения представленных уравнений позволяет выделить алгоритм решения квадратных уравнений с параметрами данного типа.

Далее учащиеся должны познакомиться с новым для них приемом решения квадратных уравнений – понижения степени. Овладевая им, учащиеся начинают понимать, что при определенных значениях параметра квадратное уравнение приобретает статус линейного.

Задание 5. При всех значениях параметра *a* решить уравнение $(2a-3)x^2+a+1=(3a-2)x.$

Приравняем к нулю коэффициент при x^2 и найдем значение параметра *a,* при котором квадратное уравнение превращается в линейное: $2a-3=0,\ a=1,5.$

При $a=1,5$ исходное уравнение принимает вид $-(3\cdot 1,5-2)x+1,5+1=0,$ откуда $x=1.$

Найдем корни уравнения $(2a-3)x^2-(3a-2)x+a+1=0$ для всех $a\neq 0$:

$$D=(3a-2)^2-4(2a-3)(a+1),\ D=a^2-8a+16,\ D=(a-4)^2,$$

$$x=\frac{(3a-2)\pm\sqrt{D}}{2(2a-3)}.$$

Анализируя значения дискриминанта, получаем контрольное значение параметра $a=4.$ Для $a=4$ исходное уравнение имеет корень четной кратности $x=1.$

Если $a\neq 1,5$ и $a\neq 4,$ то $x=\dfrac{(3a-2)\pm\sqrt{(a-4)^2}}{2(2a-3)}=\dfrac{(3a-2)\pm|a-4|}{2(2a-3)}=\left[\begin{array}{l}1,\\ \dfrac{a+1}{2a-3}\end{array}\right..$

Ответ: $a=1,5,\ a=4:\ x=1;$

$a\neq 1,5,\ a\neq 4:\ x=1,\ x=\dfrac{a+1}{2a-3}.$

Если при решении задания 5 дискриминант представлял собой полный квадрат двучлена, то уравнение задания 6 не обладает данным преимуществом. Поэтому при его решении необходимо провести полное исследование дискриминанта (квадратного трехчлена).

Задание 6. При всех значениях параметра *a* решить уравнение $(a-2)x^2-2ax=3-2a.$

Преобразуем уравнение к стандартному виду $(a-2)x^2-2ax+2a-3=0$ и применим к нему прием понижения степени.

Если $a-2=0,$ то $a=2$ и уравнение принимает вид $-4x+1=0,$ откуда $x=0,25.$

Если $a\neq 2$, то $\dfrac{D}{4}=a^2-(a-2)(2a-3)=-a^2+7a-6.$

Исследуем дискриминант:

1. Если $-a^2+7a-6>0\ \Leftrightarrow\ a^2-7a+6<0\ \Leftrightarrow\ (a-1)(a-6)<0\ \Leftrightarrow\ 1<a<6,$ то уравнение имеет два корня. Получили два новых контрольных значения параметра *a:*

Если $a=1$*,* то уравнение принимает вид $x^2+2x+1=0$, откуда $x=-1.$

Если $a = 6,$ то уравнение принимает вид $4x^2 - 12x + 5 = 0$, откуда $x = 1,5$.

Если $1 < a < 6,$ то $x = \dfrac{a \pm \sqrt{-a^2 + 7a - 6}}{a - 2}$

2. Если $(a-1)(a-6) > 0$, то уравнение не имеет корней.

Ответы: $a=1$: $x = -1$; $a=2$: $x = 0,25$;

$a=6$: $x = 1,5$;

$1 < a < 2$ и $2 < a < 6$: $x = \dfrac{a \pm \sqrt{-a^2 + 7a - 6}}{a - 2}$;

$a < 1$ и $a > 6$: решений нет.

Проведенное исследование подводит учащихся к выводу о необходимости определения вида уравнения с параметром и о корректировке алгоритма его решения. Закреплению сформированных исследовательских умений служит задание 7.

Задание 7. При всех значениях параметра *a* решить уравнения:

1) $ax^2 + (a+1)x + 1 = 0,$

2) $(a-1)x^2 + 1 = 2x + a,$

3) $(b-2)x^2 + 3b + 2 = 4bx,$

4) $ax^2 = (a+1)x + 1 + 2a.$

Далее переходим к рассмотрению дробно-рациональных уравнений с параметрами, решение которых сводится к решению квадратных уравнений. При решении уравнений данного вида необходимо с самого начала указывать значения параметра и переменной, при которых уравнение имеет смысл. Знание области допустимых значений переменной и параметра позволяет в дальнейшем исследовать корни уравнения.

Изучение дробно-рациональных уравнений начинаем с уравнений, числитель которых представляет собой квадратный трехчлен в самом «хорошем случае» - его дискриминант является полным квадратом.

Задание 8. При всех значениях параметра *a* решить уравнение

$$x - 1 = \frac{6ax + 4a - 5a^2}{x + 1}.$$

Укажем область допустимых значений переменной *x:* $x \neq -1$.

Преобразуем уравнение к стандартному виду $x^2 - 6ax + 5a^2 - 4a - 1 = 0$ и найдем его корни:

$$\frac{D}{4} = 9a^2 - 5a^2 + 4a + 1 = 4a^2 + 4a + 1 = (2a+1)^2.$$

$$x = 3a \pm (2a+1) = \left[\begin{array}{l} x = 5a + 1, \\ x = a - 1. \end{array}\right.$$

Найденные корни должны быть отличны от нуля, то есть $5a + 1 \neq -1$ или $a - 1 \neq -1$. Откуда $a \neq -0{,}4$, $a \neq 0$.

Найденные значения параметра a представляют собой его контрольные значения. При них исходное уравнение имеет один корень $x = 1$ или $x = -1{,}4$.

Ответ: $a \neq -0{,}4$: $x = -1{,}4$;

$a \neq 0$: $x = 1$;

$a \neq -0{,}4$, $a \neq 0$: $x = 5a + 1$; $x = a - 1$.

Задание 9. При всех значениях параметра *a* решить уравнение $\frac{(x-2a)(x+a)}{a} = \frac{3x}{a} + 6 - 3x - 2a$.

Решение данного уравнения требует анализа формы его записи и ограничений на параметр: $a \neq 0$. При этом условии исходное уравнение равносильно уравнению $x^2 - (2a-3)x - 6a = 0$.

Решая его, находим, что $x = 3$ или $x = -2a$. Записываем ответ.

Ответ $a = 0$: решений нет;

$a \neq 0$: $x = 3$; $x = -2a$.

Далее знакомим учащихся с решением дробно-рациональных уравнений, решение которых сводится к квадратному уравнению с дискриминантом, не являющимся полным квадратом. Учащиеся понимают, что в этом случае корень из дискриминанта не извлекается, и они сталкиваются с необходимостью решать иррациональные уравнения, что довольно трудоемко, особенно для детей, которые по возрастным показателям еще не владеют техникой их решения. В этом случае на помощь может прийти прием, ведущий к цели более коротким и технически простым путем.

Задание 10. При всех значениях параметра *a* решить уравнение

$$\frac{x+a}{x-5} + \frac{1}{x+5} = \frac{19}{25-x^2}$$

Запишем ограничения на значения переменной *x:* $x \neq \pm 5$. После необходимых преобразований перейдем к системе, равносильной исходному уравнению:

$$\begin{cases} x^2 + (6+a)x + (5a+14) = 0, \\ x \neq \pm 5. \end{cases}$$

Дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в левой части уравнения, равен

$$D = 36 + 12a + a^2 - 4(5a+14) = a^2 - 8a - 20.$$

Так что для того, чтобы уравнение имело корни, необходимо, чтобы $a^2 - 8a - 20 \geq 0$. Последнее неравенство выполняется для $a \leq -2$ или $a \geq 10$.

При остальных значениях параметра a квадратное уравнение решений не имеет, и тем более не имеет решений исходное уравнение.

Итак, при $a \leq -2$ или $a \geq 10$ квадратное уравнение имеет два корня

$$x = \frac{-(6+a) \pm \sqrt{a^2 - 8a - 20}}{2}$$

Исключим посторонние корни. Для этого найдем значения параметра *a,* при которых *x* будет равняться 5 или -5:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{-(6+a) \pm \sqrt{a^2 - 8a - 20}}{2} = 5, \\ \dfrac{-(6+a) \pm \sqrt{a^2 - 8a - 20}}{2} = -5. \end{array}\right.$$

Выполнение данных условий требует решения четырех иррациональных уравнений.

Выйти из затруднительного положения позволяет следующее рассуждение: каждое значение параметра задает свое, соответствующее только этому значению параметра, уравнение. Естественно, что каждое уравнение, в свою очередь, предполагает свой «набор» корней. Значит, справедливо и обратное: определенному значению переменной *x* соответствует «свое» значение параметра *a.*

Поэтому вычислим значения квадратного трехчлена в «запрещенных» точках:
$\left[\begin{array}{l} f(-5) = (-5)^2 - 5(6+a) + (5a+14), \\ f(5) = (5)^2 + 5(6+a) + (5a+14). \end{array}\right.$

Тогда $\left[\begin{array}{l} f(-5) = 0, \\ f(5) = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 25 - 30 - 5a + 5a + 14 = 0, \\ 25 + 30 + 5a + 5a + 14 = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{решений нет}, \\ a = -6{,}9. \end{array}\right.$

Итак, если $a = -6{,}9$, то $x = \frac{0{,}9 \pm \sqrt{47{,}61 + 55{,}2 - 20}}{2} = \frac{0{,}9 \pm 9{,}1}{2} = \left[\begin{array}{l} 5, \\ -4{,}1. \end{array}\right.$

Но $x = 5$ не является корнем, следовательно, остается корень $x = -4{,}1$.

Для завершения решения найдем корни уравнения в контрольных точках $a = -2$ и $a = 10$: если $a = -2$, то $x = -2$; если $a = 10$, то $x = -8$.

Ответ: $a = -6{,}9$: $x = -4{,}1$;

$a = -2$: $x = -2$;

$a = 10$: $x = -8$;

$-2 < a < 10$: решений нет;

$a < -6{,}9$; $-6{,}9 < a < -2$; $a > 10$: $x = \frac{-(6+a) \pm \sqrt{a^2 - 8a - 20}}{2}$.

В свете рассмотренных дробно-рациональных уравнений с параметрами, совместно с учащимися корректируем алгоритм применительно к решению такого вида уравнений.

Составленный алгоритм решения квадратных уравнений и уравнений, к ним сводимых, позволяет выделить **приемы нахождения контрольных значений параметра,** от знания которых зависит решение уравнения:

1. Нахождение области допустимых значений параметра.
2. Использование приема понижения степени уравнения.

3. Исследование дискриминанта.

4. Исключение посторонних корней уравнения по области допустимых значений переменной (прием подстановки «запрещенных» значений переменной в формулу корней квадратного уравнения).

Рассмотрим решение дробно-рационального уравнения с параметром, сводимого к квадратному, которое сочетает в себе использование всех выделенных приемов нахождения контрольных значений параметра.

Задание 11. При всех значениях параметра *a* решить уравнение $\frac{x}{a+1}+\frac{2x}{x-2}=\frac{3a-4}{(a+1)(x-2)}$.

Областью допустимых значений переменной являются все $x \neq 2$, параметра – все $a \neq -1$.

При $a = -1$ уравнение не имеет смысла, а значит, не имеет решений.

Преобразуем уравнение к виду $x^2 + 2ax + 4 - 3a = 0$ и найдем его корни, отличные от 2. Дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в левой части уравнения, равен $\frac{D}{4} = a^2 + 3a - 4$, $x = -a \pm \sqrt{a^2 + 3a - 4}$.

Естественно, для того чтобы уравнение имело решения, дискриминант должен быть неотрицательным $a^2 + 3a - 4 \geq 0$, откуда $\left[\begin{array}{l} a \leq -4, \\ a \geq 1. \end{array}\right.$

Получили новые контрольные значения параметра *a:* $a = -4$ и $a = 1$.

Если $a = -4$, то $x = 4$. Если $a = 1$, то $x = -1$.

Составим уравнение, позволяющее найти те значения параметра *a,* при которых переменная *x* принимает значение 2:

$$-a \pm \sqrt{a^2 + 3a - 4} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{a^2 + 3a - 4} = 2 + a, \\ \sqrt{a^2 + 3a - 4} = -2 - a. \end{array}\right.$$

Видим, что для нахождения контрольных значений параметра *a,* при которых корни уравнения принимают статус «запрещенных», необходимо решить два иррациональных уравнения. Чтобы избежать этого, воспользуемся рассмотренным выше приемом и найдем новые контрольные значения параметра *a,* подставив в уравнение $x^2 + 2ax + 4 - 3a = 0$ «запрещенные» значения переменной *x:* $2^2 + 2a \cdot 2 + 4 - 3a = 0$, откуда $a = -8$. Систематизируем полученные решения и запишем ответ.

Ответ: $a = -8{:}\ x = 14$;

$a = -4{:}\ x = 4$;

$a = 1{:}\ x = -1$;

$-4 < a < 1, a \neq -1{:}$ решений нет;

$$a \neq -8, -4 < a, a > 1: x = -a \pm \sqrt{a^2 + 3a - 4}.$$

Предлагаемая методика позволяет обучить школьников решению целого класса задач с параметрами, а совместная деятельность по анализу уравнения и выделению приема нахождения контрольных значений параметров готовит учащихся к осуществлению исследовательской деятельности в других разделах математики и на последующих этапах профессиональной подготовки.

Список литературы

1. Романов П.Ю. Технология воспитания педагога-исследователя в системе непрерывного образования // Научные труды МПГУ. Серия: Естественные науки. - 2001. - С. 290-294.
2. Романов П.Ю. Управление формированием исследовательских умений обучающихся в системе непрерывного педагогического образования // Государственная служба. – 2002. - № 6 (20). - С. 99-105.
3. Романов П.Ю. Формирование исследовательских умений обучающихся в системе непрерывного педагогического образования : автореф. дис. ... д-ра пед. наук. - Магнитогорск, 2003. - 47 с.
4. Романов П.Ю., Романова Т.Е. Решение задач с параметрами // Математика. Первое сентября. – 2001. - № 12. - С. 13-15.
5. Романов П.Ю., Романова Т.Е. Роль графической интерпретации результатов решения задач с параметрами в организации исследовательской деятельности учащихся // Современные проблемы обучения математике в школе / ред. Е.И. Жилина. – Магнитогорск, 2000. - С. 84-90.
6. Романов П.Ю., Романова Т.Е. Системный подход в обучении учащихся написанию уравнения касательной к графику функции // Систематизация и обобщения при обучении школьников математике / под ред. Е.И. Жилиной. – Магнитогорск, 1998. - С. 36-41.
7. Романов П.Ю., Романова Т.Е. Уравнение касательной к графику функции // Математика. Первое сентября. – 2001. - № 16. - С. 17-20.
8. Романова Т.Е. Решение уравнений и неравенств первой степени. Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля : учебное пособие. - Магнитогорск, 2004. - 63 с.