УДК 681.518.54

ИНТУИЦИОНИСТСКИЕ НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА В МОДЕЛИРОВАНИИ ЭКСПЕРИМЕНТА

Волков Ю.Д.

ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева», Саранск, Россия (430904, Саранск, ул. Российская, 5), e-mail:volkov57@rambler.ru

Проблема управления экспериментом в условиях неопределенности является одной из центральных при исследовании технических систем. Существующие модели описывают только отдельные стороны неопределенности. Вероятностная модель эксперимента отражает случайную сторону, стохастический характер процессов, нечеткая модель показывает неопределенность, связанную не только с измерениями, но и с вычислениями. Указаны ограничения традиционной теории нечетких множеств Заде. Предложена модель эксперимента, в основе которой лежит описание неопределенности на основе интуиционистских нечетких множеств Атанассова. Модель отражает двойственную природу неопределенности: случайность и накопление ошибки при вычислениях. Рассмотрен вопрос оценки надежности моделирования эксперимента.

Ключевые слова: эксперимент, неопределенность измерения, вероятностная модель, нечеткость, интуиционистские нечеткие множества, достоверность.

INTUITIONISTIC FUZZY SETS IN MODELING EXPERIMENTS

Volkov Y.D.

Ogarev Mordovia State University (MordSU), Russia, Saransk (5 Rossiyskaya Street, Saransk 430904, Russia), e-mail: volkov57@rambler.ru

The problem of control of the experiment under conditions of uncertainty is one of the central in the study of technical systems. Existing models describe only certain aspects of uncertainty. Probabilistic model of the experiment reflects the casual side, stochastic protsesov, fuzzy model shows uncertainty associated not only with the measurements, but also with the calculations. These limits are traditional Zadeh's theory of fuzzy sets. A model of the experiment, which is based on the description of uncertainty based on intuitionistic fuzzy sets Atanassova. The model reflects the dual nature of uncertainty: the chance and the accumulation of errors in calculations. The problem of assessing the reliability of the simulation experiment.

Keywords: experiment, measurement uncertainty, probabilistic model, fyzzyness, intuitionistic fuzzy sets, reliability.

Моделирование эксперимента в условиях неопределенности является одной из центральных проблем при исследовании технических систем и тесно связано с теорией, положенной в основу модели. Одной из составляющих неопределенности эксперимента является неопределенность измерения, которая состоит из двух компонент: неопределенность категории A и категории B [9]. Если к категории A относят объективные вероятностные оценки ряда измерений, то при поиске компонентов категории B возможно использование субъективных знаний, формализованных с применением теории нечетких множеств [6]. Растущие требования к точности результатов удовлетворяются не только за счет применения прецизионных приборов, но и путем использования методов мягких вычислений и измерений.

Модели эксперимента

Рассмотрим модели эксперимента, отражающие различные стороны неопределенности. Неопределенность эксперимента, связанную со случайным характером проведения измерений, воздействием внешней среды и других факторов, можно отразить в рамках *вероятностной модели* эксперимента. Как известно, классической моделью эксперимента является аксиоматическая трактовка А.Н. Колмогорова в виде вероятностного пространства

$$(\Omega, \Sigma, P), \tag{1}$$

где $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ – множество элементарных событий или исходов эксперимента; Σ - σ – алгебра подмножеств Ω; P – вероятность на Σ [7].

Дальнейшим развитием вероятностной модели (1) является предложенная в [1,3] модель активного эксперимента в пространстве состояний, которая имеет вид

$$G = \{(S, \Sigma, P), \langle F, \circ \rangle, C_F\}, \tag{2}$$

где (S, Σ, P)– дискретное вероятностное пространство с соответствующей σ-алгеброй Σ, в котором определено пространство состояний $S \subset E^n \times \mathrm{B}(E^n)$, как подмножество множества всех пар вершин n и подпространств в E^n.

Знание вероятностей $P(\varepsilon_k)$ позволяет нам вести оптимизацию по различным критериям, как энтропия эксперимента или энергозатраты [1,2,5]. Однако точечные оценки вероятностей реально часто являются недосягаемыми в силу различных ограничений.

В последнее время наблюдается интерес к применению теории нечетких множеств для описания неточности и нечеткости сложных технических объектов [6]. Нечеткая модель эксперимента на основе *FN-чисел* предложена в работе [1,3]:

$$\tilde{\Theta} = \left\{ \langle \tilde{F}, \circ \rangle, S/R, \left(A, \Psi(A), C_F\right) \right\} \tag{3}$$

где $\langle \tilde{F}, \circ \rangle$ – алгебраическая система с одной определяющей операцией;

(S/R) – дискретное пространство S с заданным отношением R;

(A, Ψ, C_F) – арифметика FN-чисел на множестве оценок A с функцией стоимости C_F, определяемое конкретной задачей, например, нечеткая оптимизация по энергозатратам [4].

Традиционной теории нечетких множеств Заде присущи ограничения, так как учитывается только область, ограниченная функцией принадлежности. Это означает необходимость перехода к новым базовым семантикам принадлежности.

Для заполнения пробела в области структуризованной неопределенности там, где нельзя корректно применять статистические методы, можно использовать расширения теории нечетких множеств, либо комбинировать нечеткость и вероятность.

Интуиционистские нечеткие множества

Концепция интуиционистского нечеткого множества (*IFS*) как расширение нечеткого множества была выдвинута К. Атанассовым [8].

Определение 1. *Интуиционистским нечетким множеством B называют множество вида*

$$B = \left\{ (x,\ \mu_B(x), \nu_B(x)) \middle|\ x \in X \right\},\ \mu_B : X \to [0,1],$$
$$\nu_B : X \to [0,1] \quad \textit{причем} \quad 0 \le \mu_B(x) + \nu_B(x) \le 1, \quad \forall x \in X, \tag{4}$$

где $\mu_B(x), \nu_B(x)$ – соответственно функции принадлежности и непринадлежности произвольного элемента x множесту X. Для каждого IFS можно определить интуиционистский индекс нечеткости $\pi_B(x) = 1 - \mu_B(x) - \nu_B(x)$.

Определены следующие операции для *IFS A* и *B*.

Определение 2. *Оператор объединения $\bigcup$ между A и B задается:*

$$A \bigcup B = \left\{ \left(x,\ \mu_{A\cup B}\ (x) = \max\left\{ \mu_A(x),\ \mu_B(x) \right\} \right), (\nu_{A\cup B}(x) = \min\left\{ \nu_A(x), \nu_B(x) \right\} \middle| x \in X. \right\}$$

Определение 3. *Оператор пересечения $\bigcap$ между A и B задается:*

$$A \bigcap B = \left\{ \left(x, \mu_{A\cap B}(x) = \min\left\{ \mu_A(x), \mu_B(x) \right\} \right), (\nu_{A\cap B}(x) = \max\left\{ \nu_A(x), \nu_B(x) \right\} \middle| x \in X. \right\}$$

Определение 4. *Дополнение множества A определяется:*

$$A^C = \left\{ \left(x, \nu(x),\ \mu_A(x) \right) \middle| x \in X \right\}.$$

Фаззификация задачи эксперимента

Для реализации вероятностной модели эксперимента необходимо знание исходного распределения вероятностей $P(\varepsilon_1), P(\varepsilon_2),...,.P(\varepsilon_n)$. При отсутствии такой оценки на ранних стадиях эксперимента применим эмпирическую или теоретическую оценку степени принадлежности и непринадлежности вероятности k-гипотезы с помощью соответствующих функций $\mu(x_k) \in \Phi,\ \nu(x_k) \notin \Phi,\ k \in \{1,...,n\}$ в рамках следующей задачи.

Задача 1. *Пусть относительно объекта исследований выдвинута группа из* n*- гипотез* $\varepsilon_1,...,\varepsilon_n$ *с функциями* $\mu(x_k) \in \Phi$ *и* $\nu(x_k) \in \Psi,\ k \in \{1,...,n\}$. *Также определено множество допустимых экспериментов* $Q = \{q_1...q_n\}$ *по верификации гипотез и соответствующие стоимости их проведения* $= \{c_1...c_n\}$. *Требуется оптимизировать процесс экспериментального подтверждения одной из гипотез* ε_k *с оценкой надежности результатов моделирования.*

Отличием такой постановки от вероятностного подхода является то, что условие несовместности и ограничения теории вероятностей могут не выполняться.

Используя априорные знания о неопределенности измерения, проводим фаззификацию задачи эксперимента. В данной работе в качестве $\mu_k(x)$ предлагается использовать унимодальные нечеткие FN -числа (треугольные), так как они более адекватно оценивают высказывания типа «*вероятность гипотезы приблизительно равна 0,5*», а в качестве $v_k(x)$ – толерантные (трапециевидные) числа (более приближены к реальности). Функции $\mu_k(x)$, $v_k(x)$ FN -чисел приведены в модифицированном *LR*-формате, который выбирается из условия минимума отклонения от нормального закона.

Аналитически $\mu_k(x)$ записывается следующим образом:

$$\mu_k(x)=\begin{cases} 0, \quad при \quad x < a-2{,}5\,\sigma; \\ \dfrac{1}{2{,}5\,\sigma}(x-(a-2{,}5\,\sigma)), \quad при \quad a-2{,}5\,\sigma_k \le x \le a; \\ -\dfrac{1}{2{,}5\sigma}(x-(a+2{,}5\sigma)), \quad при \quad a < x \le a+2{,}5\sigma; \\ 0, \quad при \quad x > a+2{,}5\,\sigma. \end{cases} \tag{6}$$

Соответственно для $v_k(x)$ выражение в LR-формате выглядит (трапециевидная форма):

$$v_k(x)=\begin{cases} 0, & a-\sigma/5 \le x \le a+\sigma/5; \\ ((a-\sigma/5)-x)/(2\sigma), & a-\dfrac{11}{5}\sigma < x < a-\sigma/5; \\ (x-(a+\sigma/5))/(2\sigma), & a+\sigma/5 < x < a+\dfrac{11}{5}\sigma; \\ 1, & \textit{в остальных случаях}. \end{cases} \tag{7}$$

Определение 5. *Нечеткие числа, функция принадлежности которых имеет график в форме равнобедренного треугольника (трапеции), отнесем к нечетким естественным числам (FN -числа) и будем записывать в виде* $\tilde{a}=(a,\Delta)$ *, где* a *– мода* FN *-числа, усредненное значение);* $\Delta = 2{,}5-3\,\sigma$ *,* σ *– среднеквадратичное отклонение оценки.*

Особенностью использования FN -чисел для оценки вероятностей заключается в том, что они наглядно отражают связь между оцениваемой величиной, возможной погрешностью и позволяют достаточно корректно ими оперировать в рамках поставленной задачи. Основные операции $(\oplus, \otimes, \log)$ для FN -чисел приведены в [4].

Определение 6. *Нечетким множеством оценок* B_k *(IFS-оценки) назовем:*

$$\begin{aligned} &B=\{(x,\mu_k(x),v_k(x))\,|\,x\in X\},\ \mu_k : x\to(0,1), \\ &\mu_k(x)=(a_k;\Delta_k),\ v_k : x\to(0,1), \end{aligned} \quad . \tag{8}$$

на котором определена Ψ *-арифметика нечетких чисел* $\Psi=\{B\to[0,1],\oplus,\otimes,\log\}$.

Модель эксперимента на основе интуиционистских нечетких множеств

Пусть S/R дискретное пространство состояний с заданным отношением R. Введем в нечеткую модель (4) *IFS*-оценки

$$\tilde{\Theta} = \left\{ \langle \tilde{F}, \circ \rangle, S/R, \left(B, \Psi(B), C_F\right) \right\} \tag{9}$$

где $\langle \tilde{F}, \circ \rangle$ – алгебраическая система с одной определяющей операцией;

(S/R) – дискретное пространство S с заданным отношением R;

(B, Ψ, C_F) - Ψ -арифметика FN -чисел на множестве B с функцией стоимости C_F, определяемое конкретной задачей .

В качестве $C(f_j)$ могут использоваться различные критерии эксперимента: стоимость, время, энергозатраты, сложность, нечеткая энтропия, достоверность.

Любому антисимметричному нечеткому отношению $\tilde{R}$ можно поставить в соответствие один (и только один) обычный антисимметричный граф G. Такое отношение можно показать на плоскости взвешенным графом с матрицей отношений $[\tilde{R}]$, в котором каждая пара вершин (S_i, S_j) соединяется стрелкой с весом $\tilde{R}(S_j, S_{j+1})$, рис.1.

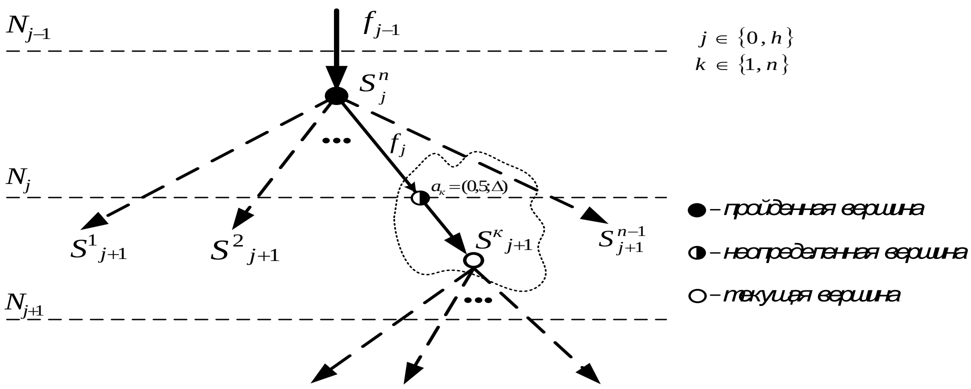

Рис. 1. Поиск в пространстве S при нечетком подходе

Неопределенность, возникающую в процессе проведения эксперимента, введем появлением в последовательности координатой $a_k = 0{,}5$ – «состояние не определено», рис. 1.

Будем учитывать особенности процесса эксперимента. Если в результате q_j - эксперимента отвергнута гипотеза ε_k, (произошло событие B_k), то вследствие теоремы Байеса получаем апостериорные (поисковые) оценки вероятностей гипотез ε_j:

$$A(\varepsilon_j / B_k) = \frac{\tilde{a}_j}{1 - \tilde{a}_k} = \frac{(a_j; \Delta_j)}{1 - (a_k; \Delta_k)}. \tag{10}$$

Модель (9) позволяет по мере набора статистического материала осуществить переход к вероятностной модели. После проведения q_j определяются количественные значения $C(f_j)$ и направление поиска.

Возникает вопрос, до какого момента можно доверять интуиционистскому моделированию? Какова надежность подтверждения гипотезы?

Надежность подтверждения гипотезы

Пусть будет проведена серия из k-экспериментов для статистического подтверждения одной из n-гипотез, $k \le n$. В основу пересчета распределения оценок вероятностей B после каждой *серии* положим следующий принцип. Оценки вероятностей гипотез рассмотрим как веса вершин стандартного симплекса, рис. 2. Тогда априорное распределение оценок вероятностей гипотез $(b_1, b_2, ..., b_n)$ будет определять центр тяжести симплекса. После серии экспериментов центр тяжести симплекса переместится в точку B', апостериорное распределение оценок будет в случае подтверждения k-ой гипотезы

$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB} + h_k, \tag{11}$$

что изображено на рис.3 для случая $k = 1, n = 3$.

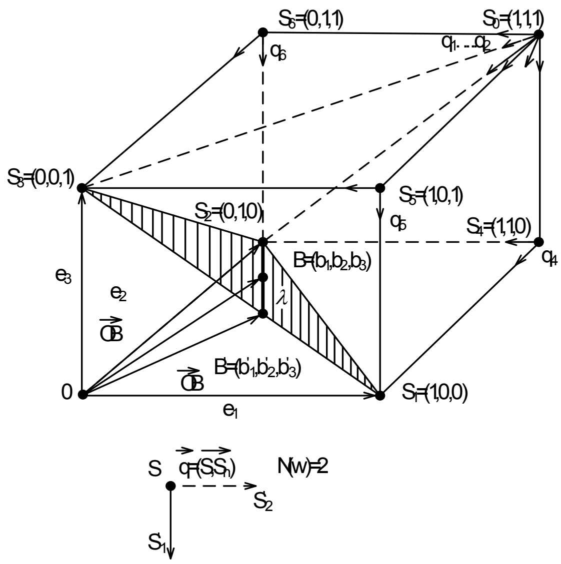

Рис. 2. Представление симплекса B в S

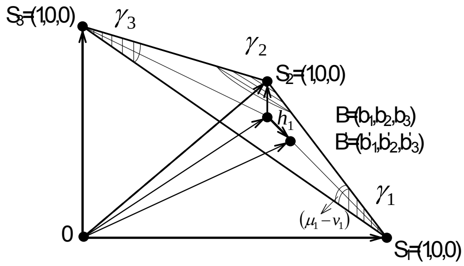

Рис. 3. Апостериорное распределение оценок B'

На симплексе B можно выбрать замкнутые и выпуклые множества $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$, не зависящих от априорного распределения B. При попадании распределения B' в одно из множеств $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ принимается окончательное решение о принятии гипотезы. Выработаем соответствующее *решающее правило*. После каждой серии экспериментов $(m = 0, 1, ...)$ определяется точка B_m на симплексе B. Эксперименты продолжаются до тех пор, пока B_m не попадет в одно из множеств $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$. Если B_m попадает внутрь области

γ_k , эксперимент прекращается и принимается решение $d_k(k=1,2,...,n)$, где k – номер подтвержденной гипотезы. Если B_m попадает в область $B_k=\mu_k(x)-\nu_k(x)$, вопрос о прекращении эксперимента и принятии окончательного решения или о продолжении решается при помощи независимого случайного механизма.

Построим множества $\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n$ исходя из понятия надежности гипотезы. Надежностью гипотезы назовем

$$\alpha(p)=\inf\{\alpha|\alpha, A\in T_k\}, \tag{12}$$

- минимальный уровень значимости, при котором B принадлежит множеству γ_k. Выпуклые и замкнутые множества γ_k при вершинах стандартного симплекса могут быть заданы условиями, исходя из обычной метрики в пространстве состояний S

$$\sqrt{b_1^2+b_2^2+...+\left(b_k^2-1\right)^2+...+b_n^2}\geq\alpha_0, \tag{13}$$

где $\alpha_0=1-\nu_k$, где ν_k – малое положительное число.

Если неравенство (13) выполняется, то мы должны принять гипотезу, а если нет, то отвергнуть. Критерий (13) обычно носит название критерия значимости гипотезы, а число α_0 , которое выступает в роли предельной оценки вероятности, называется уровнем значимости критерия или коэффициентом доверия (надежности).

Заключение

Таким образом, применение *IFS* вместо нечетких множеств означает введение дополнительных степеней свободы. Такое обобщение нечетких множеств дает нам дополнительную возможность представления недостаточных знаний о том, что лежит в описании многих действительных проблем эксперимента.

Нечетко-вероятностная модель эксперимента позволяет выбрать наилучшее представление и формулировать задачу эксперимента в зависимости от уровня знаний об объекте исследований, в нашем случае о теории, которой должна стать одна из гипотез. Принятие гипотезы связано с критерием α_0, то есть коэффициентом доверия (надежности).

Список литературы

1. Волков Ю.Д. Интеллектуализация эксперимента: проблемно-ориентированный подход // Фундаментальные исследования. – 2015. – № 2–9. – С. 1843-1848.

2. Волков Ю.Д., Дудин А.В. Оптимизация эксперимента по энергозатратам в условиях вероятностной неопределенности // Науч.-техн. вестник Поволжья. – 2014. – № 5. – С.147-149.

3. Волков Ю.Д., Кочугаев П.Н. Модели эксперимента в условиях неопределенности. // Науч.-техн. вестник Поволжья. – 2013. – № 6. – С.215-218.

4. Волков Ю.Д., Кочугаев П.Н. Арифметика нечетких FN -чисел при обработке результатов измерений.// Инф.-выч. технологии и их приложения: сб. статей XV Межд. науч.-техн. конф. (Пенза, 23–32 июня 2011 г.). – РИО ПГСХА, 2011. – С.22-27.

5. Волков Ю.Д. Оптимизация эксперимента по энергозатратам: нечеткий подход // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 6; URL: http://www.science-education.ru/120-16590 (дата обращения: 24.12.2014).

6. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / под ред. Д.А.Поспелова. – М.: Наука, 1986. – 312 с.

7. Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, Глав. Ред. Физ-мат. литературы, 1980. – 576 с.

8. Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems 20 (1), 87-96, 1986.

9. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement: First Edition. – ISO, Switzerland, 1993. – 101 p.

Рецензенты:

Чаткин М.Н. д.т.н., профессор, ректор ФГБОУ «Мордовский институт переподготовки кадров агробизнеса», г. Саранск;

Щенников В.Н., д.ф-м.н., профессор ФГБОУ ВПО «МГУ им. Н.П. Огарева, г. Саранск.