

## НЕЧЕТКИЙ АНАЛИЗ ПРИМЕНИМОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ОРГАНИЗАЦИОННО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Ломазов В.А.<sup>1</sup>, Ломазова В.И.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Белгородский государственный аграрный университет имени В.Я. Горина, [vlomazov@yandex.ru](mailto:vlomazov@yandex.ru);

<sup>2</sup>Белгородский государственный национальный исследовательский университет

---

Статья посвящена проблеме выбора математических моделей при проведении научных исследований сложных производственно-экономических систем. Рассмотрены теоретические аспекты применения методологического аппарата нечеткого теоретико-множественного анализа для решения задач моделирования взаимосвязанных организационно-технологических процессов. Предложено нечеткое описание областей применимости используемых моделей, порождающее отношение частичного порядка на множестве моделей. На основе понятий точных граней (применяемых к упорядоченным множествам моделей взаимосвязанных процессов) построены нечеткие теоретико-множественные операции над моделями. Сформулирована постановка задачи выбора (синтеза) моделей для решения заданного круга задач, возникающих при исследовании производственно-экономических систем. Предложена эвристическая процедура решения поставленной задачи. Подсистема синтеза моделей, основанная на применении предложенного подхода, включена в состав исследовательского прототипа информационно-аналитической системы моделирования организационно-технологических процессов. Предварительные результаты применения разработанной процедуры показали ее эффективность.

Ключевые слова: сложная система, взаимосвязанные процессы, математическая модель, нечеткий теоретико-множественный анализ, проблема выбора.

## FUZZY ANALYSIS OF THE APPLICABILITY MATHEMATICAL MODEL SOF INTERRELATED ORGANIZATIONAL TECHNOLOGICAL PROCESSES

Lomazov V. A.<sup>1</sup>, Lomazova V. I.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Belgorod State Agricultural University named after V. Ya. Gorina, [vlomazov@yandex.ru](mailto:vlomazov@yandex.ru);

<sup>2</sup>Belgorod State National Research University

---

The article is devoted to the selection of mathematical models for scientific research of complex industrial and economic systems. The theoretical aspects of application of fuzzy set-theoretic methodology to solve the problems of interrelated organizational technological processes modeling are considered. Proposed fuzzy description of the areas of applicability of the models, generating a partial order on the set of models. Fuzzy set-theoretic operations for models based on the concepts of infimum and supremum (applicable to ordered sets of models of interrelated processes) are constructed. It is formulated the problem of choice (synthesis) models for solving a given range of problems arising in the study of industrial and economic systems. A heuristic procedure to solve this problem is suggested. The subsystem for synthesis of models based on the application of the proposed approach is included in the research prototype information-analytical system modeling organizational and technological processes. Preliminary results of the developed procedure showed its effectiveness.

Keywords: complex system, interconnected processes, mathematical model, fuzzy set-theoretic analysis, the problem of choice.

Широкая распространенность взаимосвязанных процессов в различных областях техники и технологий (например, [1-3,6]) привела к необходимости изучения особенностей и общих закономерностей этих процессов. Одним из наиболее эффективных способов научного исследования является абстрактное (формальное) моделирование изучаемого объекта (прототипа), которое сводится к замене в ходе исследования прототипа на его упрощенное (но сохраняющее все необходимые с точки зрения цели исследования свойства) описание. При этом возникает проблема выбора (синтеза) наиболее подходящих

математических моделей, которые, с одной стороны, были бы удобны для использования, а с другой стороны, соответствовали бы рассматриваемому кругу задач.

Целью настоящей работы является анализ областей применимости математических моделей взаимосвязанных организационно-технологических процессов. Применяемый подход основан на использовании теории нечетких множеств и отношений [11], что отличает его от стохастических подходов, используемых в [7,8], и дает новые возможности для выбора моделей изучаемых процессов.

### **Математическое моделирование взаимосвязанных организационно-технологических процессов**

Будем предполагать (в соответствии с [4,5]), что исследуемые взаимосвязанные процессы  $Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_K(t)$ , рассматриваемые во временном интервале  $t_{нач} \leq t \leq t_{кон}$ , допускают аддитивное математическое описание

$$Z_1(t) = f_{11}(t, Z_1(t-1)) + f_{12}(t, Z_2(t-1)) + \dots + f_{1K}(t, Z_K(t-1))$$

$$Z_2(t) = f_{21}(t, Z_1(t-1)) + f_{22}(t, Z_2(t-1)) + \dots + f_{2K}(t, Z_K(t-1))$$

...

$$Z_K(t) = f_{K1}(t, Z_1(t-1)) + f_{K2}(t, Z_2(t-1)) + \dots + f_{KK}(t, Z_K(t-1))$$

где диагональные слагаемые отражают «эффект памяти» (зависимость значений текущих параметров процесса от предыдущих значений), а остальные слагаемые отражают взаимные влияния процессов. При решении некоторых задач связями между отдельными процессами можно пренебречь, что дает возможность использования упрощенных соотношений, не включающих соответствующие слагаемые. Таким образом, каждой матрице связности вершин  $(a_{ij})$   $i, j = 1, 2, \dots, K$ , построенной для графа взаимосвязей между процессами, может быть поставлена в соответствие некоторая упрощенная модель. При этом матрица, состоящая из единиц  $a_{ij} = 1$  ( $i, j = 1, 2, \dots, K$ ), соответствует полно связной модели, а единичная матрица  $a_{ij} = 1$  при  $i = j$ ,  $a_{ij} = 0$  при  $i \neq j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, K$ ) – модели, не учитывающей связей между процессами. В общем случае упрощенная модель может быть представлена бинарной квадратной матрицей, что удобно при описании всего конечного множества возможных моделей взаимосвязанных процессов  $MATMOD$ , мощность которого (при большом числе рассматриваемых процессов) может быть достаточно велика:  $|MATMOD| = 2^{K^2}$ .

Использование упрощенных моделей взаимосвязанных процессов позволяет сократить затраты на выполнение вычислительных экспериментов, что делает актуальной проблему описания и синтеза (выбора из заданного множества) моделей для решения заданного круга задач.

### **Нечеткие отношения и операции над математическими моделями**

Рассмотрим конечную совокупность задач предметной области, для решения которых могут быть использованы рассматриваемые модели:  $Tasks = \{Task_1, Task_2, \dots, Task_n, \dots, Task_N\}$ . В рамках конкретной предметной области множество  $Tasks$  соответствует понятию универсума задач.

Обозначим  $TaskMatMod$  – множество задач, которые могут быть решены с использованием конкретной модели  $MatMod$ , которое назовем множеством (областью) применимости модели  $MatMod$ . Тогда  $TaskMatMod \subseteq Tasks$ , т.е. множество применимости конкретной модели является подмножеством всей совокупности задач предметной области.

Наряду с задачами, безусловно решаемыми с использованием модели  $MatMod$ , целесообразно рассмотреть задачи, которые до некоторой степени могут быть решены с использованием  $MatMod$ . Обозначим  $\tilde{TaskMatMod}$  – нечеткое множество применимости:

$\tilde{TaskMatMod} = \{ (Task_i, \mu_i) \mid i=1, 2, \dots, N \}$ , где функция принадлежности  $\mu_i = \mu(Task_i)$  принимает значения на отрезке  $[0, 1]$  и отражает определяемую экспертами степень соответствия модели  $MatMod$  задачам  $Task_1, Task_2, \dots, Task_N$ . Носителем нечеткого множества  $\tilde{TaskMatMod}$  является совокупность задач, хоть в какой-то степени решаемых моделью  $MatMod$ :

$$Supp(\tilde{TaskMatMod}) = \{Task_i \mid \mu(Task_i) > 0, i=1, 2, \dots, N\}$$

Ядро нечеткого множества  $\tilde{TaskMatMod}$  представляет собой совокупность задач, в полной мере решаемых моделью  $MatMod$ :

$$Kern(\tilde{TaskMatMod}) = \{Task_i \mid \mu(Task_i) = 1, i=1, 2, \dots, N\}.$$

Важными частными случаями являются:

- универсальная модель  $MatModU$ , позволяющая в полной мере решить весь рассматриваемый круг задач предметной области:  $Kern(\tilde{TaskMatModU}) = Tasks$ ;

- пустая модель  $MatMod0$ , не позволяющая ни в какой степени решить ни одну задачу из рассматриваемого круга задач предметной области:  $Supp(\tilde{TaskMatMod0}) = \emptyset$ .

Будем полагать, что универсальная модель  $MatModU$  соответствует полно связной модели ( $a_{ij}=1; i, j=1, 2, \dots, K$ ), пустая модель  $MatMod0$  соответствует несвязной модели без памяти ( $a_{ij}=0; i, j=1, 2, \dots, K$ ), и что различным моделям соответствуют несовпадающие множества применимости, т.е.:

$$MatMod1 \neq MatMod2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{TaskMatMod1} \neq \tilde{TaskMatMod2}.$$

Введем отношение применимости на множестве математических моделей, полагая модель  $MatMod1$  не более применимой, чем модель  $MatMod2$ , если нечеткое множество применимости модели  $MatMod1$  включено в нечеткое множество применимости модели  $MatMod2$ , т.е.:

$$MatMod1 \angle MatMod2, \text{ если } \tilde{TaskMatMod1} \subseteq \tilde{TaskMatMod2}$$

Здесь в соответствии с определением включения нечетких множеств [10],  $\tilde{TaskMatMod1} \subseteq \tilde{TaskMatMod2}$  означает, что

$$\mu_1(Task_i) \leq \mu_2(Task_i) (i=1,2,\dots,N)$$

Нетрудно видеть, что так введенное отношение применимости будет отношением частичного порядка на множестве моделей  $MATMOD$ , т.к. для него выполняются:

-рефлексивность:  $MatMod1 \angle MatMod1$ ;

-антисимметричность:

$$MatMod1 \angle MatMod2, MatMod2 \angle MatMod1 \Rightarrow MatMod1 = MatMod2;$$

-транзитивность:

$$MatMod1 \angle MatMod2, MatMod2 \angle MatMod3 \Rightarrow MatMod1 \angle MatMod3.$$

При решении практических задач моделирования зачастую используют несколько моделей. Рассмотрим подмножество  $MATMOD^*$  множества моделей  $MATMOD$

$$MATMOD^* \subseteq MATMOD$$

Точной нижней гранью (infimum) множества  $MATMOD^*$  будет модель  $MatMod^* \in MATMOD$ , не превосходящая по применимости все модели этого множества, т.е.

$$inf MATMOD^* = MatMod^* : MatMod^* \angle MatMod, \forall MatMod \in MATMOD^*.$$

В случае, когда модель  $MatMod^*$ , представляющая собой точную нижнюю грань множества  $MATMOD^*$ , является элементом этого множества, она является также минимальным элементом этого множества, т.е.

$$min MATMOD^* = inf MATMOD^* \text{ при } inf MATMOD^* \in MATMOD^*.$$

Понятия точной верхней грани (*sup*) и максимума (*max*) применительно к множеству моделей взаимосвязанных процессов (с учетом введенного отношения частичного порядка  $\angle$ ) определяются аналогичным образом. Нетрудно видеть, что точные грани существуют для любого множества моделей  $MATMOD^*$ , поскольку для любой математической модели  $MatMod$  выполняются отношения:  $MatMod0 \angle MatMod \angle MatModU$ . Максимальные и минимальные элементы для некоторых множеств могут не существовать.

Основываясь на введенных понятиях точных граней, естественно ввести операции над моделями взаимосвязанных процессов.

Объединением моделей  $MatMod1$  и  $MatMod2$  назовем точную верхнюю грань множества, состоящего из этих моделей:

$$MatMod1 \cup MatMod2 = sup\{ MatMod1, MatMod2 \}.$$

Пересечение моделей  $MatMod1$  и  $MatMod2$  назовем точную нижнюю грань множества, состоящего из этих моделей:

$$MatMod1 \cap MatMod2 = inf\{ MatMod1, MatMod2 \}.$$

Упорядочение моделей в соответствии с областями их применимости и введение операций над моделями позволяют формулировать и решать задачи выбора моделей взаимосвязанных процессов.

### Использование нечеткого анализа областей применимости при выборе моделей

Сформулируем постановку задачи формирования множества моделей для решения заданного круга задач:

Имеется конечное множество моделей  $M = \{MatMod_1, MatMod_2, \dots, MatMod_m\}$ . Задано условие в виде нечеткого множества задач, подлежащих решению  $\tilde{T}ask = \{(Task_i, \mu_i) | i = 1, 2, \dots, N\}$ . Требуется найти минимальное по мощности множество моделей  $minMATMOD^* \subseteq M$ , удовлетворяющее этому условию.

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$minMATMOD^* = argmin(|MATMOD^*|),$$

$$MATMOD^* = \{MatMod : \tilde{T}ask \subseteq \cup \tilde{T}ask_{MatMod}\}$$

Для исследования поставленной задачи рассмотрим ориентированный граф упорядочения моделей, где вершины графа – элементы множества  $M$ , а дуги – отношения частичного порядка (рис.1). Нетрудно видеть, что искомое множество может быть сформировано из корневых вершин графа, не имеющих входных дуг (полустепень исхода  $P = 0$ ). Однако некоторые корневые вершины графа не обязательно должны входить в искомое множество.

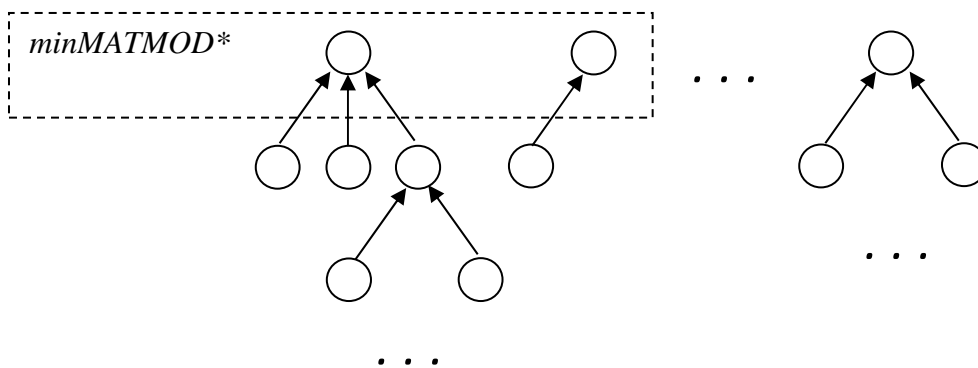


Рис. Граф упорядочения моделей взаимосвязанных процессов с выделенным подмножеством корневых вершин  $minMATMOD^*$

Эвристическая итерационная процедура нахождения решения сформулированной задачи состоит в последовательном уменьшении исходного множества моделей  $M$  до тех пор, пока выполняется условие и включает в себя следующие этапы:

- Формирование объединения множеств применимости моделей  $M$  и проверка условия:

$$\tilde{T}ask \subseteq \tilde{T}ask_M, \text{ где } \tilde{T}ask_M = \cup \tilde{T}ask_{MatMod}, MatMod \in M.$$

Если условие не выполняется, то конец работы процедуры с сообщением о неразрешимости задачи.

- Последовательное исключение корневых вершин графа и проверка выполнения условия. На последней итерации (пока еще выполняется условие) получается решение, которое является оптимальным (при полном переборе возможных исключений корневых вершин) или рациональным (при случайном выборе корневых вершин, подлежащих исключению и заданном числе итераций).

### **Выводы**

Предложенный подход к проблеме выбора (синтеза) моделей взаимосвязанных организационно-технологических процессов, основанный на применении нечеткого теоретико-множественного аппарата, позволил структурировать совокупность моделей и сформулировать математическую постановку задачи формирования минимального по мощности множества моделей для решения заданного круга задач предметной области. Предложенная эвристическая процедура позволяет найти оптимальное или рациональное (в зависимости от используемого варианта) решение. Подсистема синтеза моделей, основанная на применении предложенного подхода, включена в состав исследовательского прототипа информационно-аналитической системы моделирования организационно-технологических процессов [9]. Предварительные результаты применения разработанной процедуры показали ее эффективность. Дальнейшее развитие предложенного подхода может быть связано выбором модели не только исходя из ее применимости, но и с учетом предполагаемых затрат, связанных с ее применением.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 14-07-00246 и № 15-07-05715.*

### **Список литературы**

1. Бровка Г. П. Взаимосвязанные процессы тепло- и массопереноса в природных дисперсных средах. – Минск: Беларуская Навука, 2011. – 364 с.
2. Ветренко М.С., Ломазов В.А. Информационное обеспечение исследований конструкционных композитных материалов // Информационные системы и технологии. – 2008. – № 1–3. – С. 27-32.
3. Вовченко А.И., Ломазов В.А. Автоматизация оценки и прогнозирования технического состояния железнодорожных колесных пар // Информационные системы и технологии. – 2010. – № 4 (61). – С. 95-99.

4. Жилияков Е.Г., Ломазова В.И., Ломазов В.А. Компьютерная кластеризация совокупности аддитивных математических моделей взаимосвязанных процессов // Вопросы радиоэлектроники. – 2011. – Т. 4, № 1. – С. 115-119.
5. Жилияков Е.Г., Ломазова В.И., Ломазов В.А. Селекция аддитивных функциональных моделей сложных систем // Информационные системы и технологии. – 2010. – № 6 (62). – С. 66-70.
6. Ломазов В.А., Немировский Ю.В. Учет термочувствительности в задаче диагностики термоупругих сред // Прикладная механика и техническая физика. – 2003. – Т. 44, № 1 (257). – С. 176-184.
7. Ломазов В.А., Ломазова В.И. Формализация выбора математических моделей связанных полей при автоматизации исследований // Информационные системы и технологии. – 2010. – № 3 (59). – С. 79-85.
8. Ломазов В.А., Ломазова В.И., Петросов Д.А. Эволюционная процедура поддержки принятия решений при моделировании взаимосвязанных процессов // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В.И. Вернадского. – 2014. – № 2 (51). – С. 82-89.
9. Ломазов В.А., Ломазова В.И. Информационное представление моделей взаимосвязанных организационно-технологических процессов // Успехи современного естествознания. – 2015. – № 1-2. – С. 337-338.
10. Ярушкина Н.Г. Основы теории нечетких и гибридных систем. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 320 с.
11. Zadeh L.A. Fuzzy Sets // Information and Control. 1965. Vol. 8. P.338-353.

**Рецензенты:**

Дюкарев Ю. М., д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры математики и физики, ФГБОУ ВО «Белгородский государственный аграрный университет им. В.Я. Горина», г. Белгород.

Маторин С. И., д.т.н., профессор, профессор кафедры прикладной математики и информатики, ФГАОУ ВПО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет», г. Белгород.