

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА РАБОТЫ ВИБРАЦИОННОГО ГРОХОТА С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ ВИБРОВОЗБУДИТЕЛЯМИ

¹Денцов Н.Н.,¹Мионов А.А.

¹Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексева, Нижний Новгород, Россия (603950, Нижний Новгород, ГСП ул. К. Минина, 24), e-mail: dentsovnn90@mail.ru, miran56@mail.ru

Приведены динамическая и математическая модели вибрационного грохота на комбинационном параметрическом резонансе. Определены стационарные решения исходя из усредненных уравнений первого приближения. Составлена матрица Якоби десятого порядка, из которой следует система уравнений возмущенного движения. Приведен метод для анализа устойчивости системы уравнений возмущенного движения с линейной зависимостью путем разбиения системы на более простые подсистемы без линейной зависимости. Рассмотрена устойчивость стационарных колебаний вибрационного грохота на основе критерия Рауса-Гурвица. Приведена амплитудно-частотная характеристика для различных параметров системы, на которой отображены устойчивые и неустойчивые положения равновесия. В системе реализуется самоуправляемое и самоподдерживаемое устойчивое собственное движение машины за счет слабых, но «умных» воздействий. Результаты данной работы могут быть использованы для создания новых высокоэффективных резонансных вибрационных машин.

Ключевые слова: динамика, вибрационный грохот, параметрический резонанс, однонаправленные колебания, устойчивость положения равновесия, метод усреднения

RESEARCH OF STABILITY OF THE STATIONARY OPERATING MODE OF THE SCREEN RIDDLE WITH PARAMETRIC VIBRATORS

¹Dentsov N.N., ¹Mironov A.A.

¹Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R. E. Alekseev, Nizhny Novgorod, Russia (Official municipal post Mininast, 24, Nizhny Novgorod, 603950, Russia), e-mail: dentsovnn90@mail.ru, miran56@mail.ru.

Dynamic and mathematical sample pieces of a screen riddle on a combinational parametric resonance are reduced. Stationary decisions proceeding from the average equations of the first approach are defined. The die the Jacobi of the tenth order from which the disturbed motion set of equations follows is made. The method for a stability study of a set of equations of a disturbed motion with a linear dependence by system partition on more simple subsystems without a linear dependence is reduced. Stability of stationary oscillations of a screen riddle on the basis of criterion of Rausa-Gurvitsa is considered. The amplitude-frequency characteristic for various parametres of system on which steady and unstable positions of equilibrium are mapped is reduced. In system homing and self-bolstered steady own movement of the machine at the expense of weak, but "clever" effects is realised. Results of the given operation can be used for creation of new highly effective resonance vibrational machines.

Keywords: dynamics, screen riddle, parametric resonance, unidirectional oscillations, stability of position of equilibrium, averaging method.

В настоящее время процесс разделения кусковых и сыпучих материалов, а также твердой фазы пульпы и суспензий на продукты различной крупности с помощью просеивающих поверхностей с калиброванными отверстиями, традиционно называемый грохочением, является весьма распространенным на всех без исключения предприятиях, добывающих и перерабатывающих минеральное сырье. Используемые на производстве вибрационные грохоты, работающие в зарезонансном режиме, являются низкоэффективными при значительных затратах энергии. Значительное улучшение качественных и количественных показателей вибрационного грохота возможно за счет

использования резонансного режима работы, который трудно реализовать из-за его низкой стабильности. Использование комбинационного параметрического резонанса [1-4] позволяет стабилизировать резонансный режим работы и значительно повысить эффективность грохота.

Цель исследования

Целью данной работы является исследование устойчивости стационарного режима работы вибрационного грохота на комбинационном параметрическом резонансе.

Материалы и методы

Важнейшим вопросом динамики резонансного грохота является исследование устойчивости стационарного режима, поскольку резонансные машины чувствительны к изменению технологической нагрузки [6]. Рассмотрим устойчивость стационарного режима динамической модели грохота, предложенной в [7] и представленной на рисунке 1. Параметрические вибровозбудители 3 жестко закрепляются на корпусе грохота 1 массой M_0 . Основным узлом параметрического вибровозбудителя является роторно-маятниковая система. Механизм инерционного элемента (ИЭ) вибровозбудителя выполнен по патенту № 2410167 [9]. Грохот связан упругими элементами 5 с основанием, которое жестко закреплено на фундаменте 6 (рис. 1).

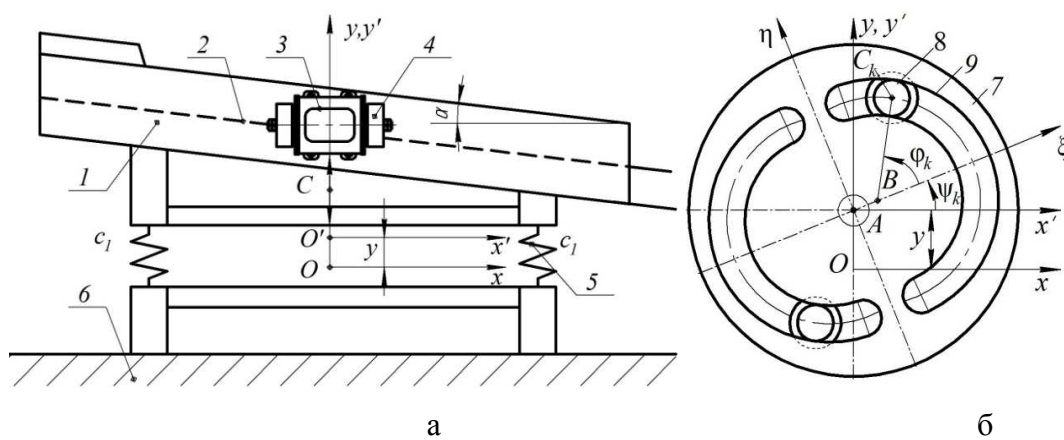


Рис. 1. Динамическая модель вибрационного грохота

При исследовании устойчивости движения целесообразно наблюдать не поведение обобщенных координат системы в возмущенном движении, а только их возмущения (вариации) от координат, которые они имели в невозмущенном движении.

Будем исходить из дифференциальных уравнений движения, полученных в [7]. Если ввести безразмерное время $\tau = \lambda_2 t$, безразмерные координаты $\tilde{y} = y/l$ и удерживать в указанных уравнениях величины до третьего порядка относительно координат и их производных, то математическую модель вибрационного грохота с параметрическими вибровозбудителями можно записать в следующем виде:

$$\ddot{\varphi}_k + v^2 \tilde{\omega}^2 \varphi_k = v^2 \ddot{y} (\varphi_k \sin \tilde{\psi}_k - \cos \tilde{\psi}_k + \frac{1}{2} \varphi_k^2 \cos \tilde{\psi}_k) + \beta_1 v^2 \tilde{\omega}^2 \varphi_k^3 - 2(\tilde{n}_0 + \tilde{h}_0 \varphi_k^2) \dot{\varphi}_k, \quad k=1, 2, \dots, N,$$

$$\ddot{\tilde{y}} + \tilde{y} = \sigma \mu_0 \sum_{k=1}^N [(-\ddot{\varphi}_k + \tilde{\omega}^2 \varphi_k) \cos \tilde{\psi}_k + 2\tilde{\omega} \dot{\varphi}_k \sin \tilde{\psi}_k - \frac{1}{2} \tilde{\omega}^2 \varphi_k^2 \sin \tilde{\psi}_k + \varphi_k \ddot{\varphi}_k \sin \tilde{\psi}_k +$$

$$+ 2\tilde{\omega} \varphi_k \dot{\varphi}_k \cos \tilde{\psi}_k + \dot{\varphi}_k^2 \sin \tilde{\psi}_k + \frac{1}{2} \varphi_k^2 \ddot{\varphi}_k \cos \tilde{\psi}_k - \frac{1}{6} \tilde{\omega}^2 \varphi_k^3 \cos \tilde{\psi}_k - \tilde{\omega} \dot{\varphi}_k \varphi_k^2 \sin \tilde{\psi}_k +$$

$$+ \varphi_k \dot{\varphi}_k^2 \cos \tilde{\psi}_k] - \beta_2 \tilde{y}^3 - 2(\tilde{n} + \tilde{h} \tilde{y}^2) \dot{\tilde{y}}, \quad (1)$$

где $\beta_1 = 1/6$, $\varepsilon_0 = v^2 N m \rho_c / (2Ml)$, $\varepsilon = \sum_{i=1}^4 \varepsilon_i = 4\varepsilon_0$, $\tilde{n}_0 = n_0 / \lambda_2$, $\tilde{n} = n / \lambda_2$ – безразмерные коэффициенты линейного демпфирования, $\tilde{h}_0 = h_0 / \lambda_2$, $\tilde{h} = h / \lambda_2$ – безразмерные коэффициенты нелинейного демпфирования, $\beta_2 = \gamma l^2$ – коэффициент нелинейности упругих восстанавливающих сил, $\tilde{\omega} = \omega / \lambda_2$ – безразмерная частота параметрического возбуждения, $v^2 = m \rho_c l / J_B$, $\rho_c = BC_k$, $\tilde{\psi}_k = \tilde{\omega} \tau + 2\pi k / N$, $\gamma = c_1 / c$, N – количество тел качения, $M = M_0 + m_0 + Nm$ – общая масса системы, σ – количество дисков, J_B – момент инерции тела качения относительно оси обкатки, $n_0 = \alpha / 2J_B$, $n = b / 2M$, $h_0 = \alpha_1 / (2J_B)$, $h = b_1 / (2M)$, λ_1, λ_2 – собственные частоты тел качения и рабочего органа. Точка обозначает дифференцирование по τ .

Решение уравнений (1) будем искать в виде:

$$\varphi_k = A_k \cos(\omega_1 \tau + \theta_k), \quad k=1, 2, \dots, N, \quad \tilde{y} = A \sin(\omega_2 \tau + \theta). \quad (2)$$

Принимая A, A_k, θ, θ_k за новые медленные переменные и выполняя стандартную процедуру метода усреднения [5], после преобразований получим усредненные уравнения первого приближения.

$$\dot{A}_k = \frac{1}{4} \frac{v^2 \omega_2^2}{\omega_1} A \left(1 - \frac{1}{8} A_k^2\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{N} - \theta_k - \theta\right) - \tilde{n}_0 u_0 A_k,$$

$$\dot{\theta}_k = -\Delta^{(k)}_{1\beta} + \frac{1}{4} \frac{v^2 \omega_2^2}{\omega_1} \frac{A}{A_k} \left(1 - \frac{3}{8} A_k^2\right) \sin\left(\frac{2\pi k}{N} - \theta_k - \theta\right),$$

$$\dot{A} = \frac{1}{4} \sigma \mu_0 \omega_2 \sum_{k=1}^N A_k \left(1 - \frac{1}{8} A_k^2\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{N} - \theta_k - \theta\right) - \tilde{n} u A, \quad (3)$$

$$\dot{\theta} = -\Delta_{2\beta} + \frac{1}{4} \sigma \mu_0 \omega_2 \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{A} \left(1 - \frac{1}{8} A_k^2\right) \sin\left(\frac{2\pi k}{N} - \theta_k - \theta\right), \quad k=1, 2, \dots, N,$$

Стационарный режим работы вибрационной машины получается как особые точки системы (3) при равных нулю правых частях, т. е. $\dot{A}_k = \dot{A} = \dot{\theta}_k = \dot{\theta} = 0$. Поскольку осцилляторы качения идентичны, то $A_k = A_0$, $k=1, 2, \dots, N$. Также должно выполняться условие $\theta_k = 2\pi k / N$, $k=1, 2, \dots, N$.

В результате приходим к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных стационарных амплитуд A_0, A , фазы θ и частот генерации ω_1 и ω_2

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \frac{v^2 \omega_2^2}{\omega_1} \frac{A}{A_0} \left(1 - \frac{1}{8} A_0^2\right) \cos \theta &= \tilde{n}_0 u_0, & \frac{1}{4} \mu_0 \sigma N \omega_2 \frac{A_0}{A} \left(1 - \frac{1}{8} A_0^2\right) \cos \theta &= \tilde{n} u \\ \frac{1}{4} \frac{v^2 \omega_2^2}{\omega_1} \frac{A}{A_0} \left(1 - \frac{3}{8} A_0^2\right) \sin \theta &= -\Delta_{1\beta}, & \frac{1}{4} \mu_0 \sigma N \omega_2 \frac{A_0}{A} \left(1 - \frac{1}{8} A_0^2\right) \sin \theta &= -\Delta_{2\beta} \end{aligned} \quad (4)$$

Исследуем устойчивость особых точек, соответствующих стационарному режиму колебаний, воспользовавшись методом, предложенным в [8]. Для этого составим уравнения в вариациях:

$$\dot{\tilde{q}}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{q}_j, \quad (5)$$

где $a_{ij} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{ij}}{\partial \tilde{q}_j}$ – коэффициенты уравнений первого приближения (матрица Якоби),

$\tilde{q}_j = q_j(t) - f_j(t)$ – вариация (отклонение) величины $q_j(t)$.

Устойчивость положения равновесия определяется знаками действительных частей собственных значений матрицы Якоби. Чтобы найти собственные значения p , необходимо решить характеристическое уравнение алгебраического вида:

$$a_0 p^z + a_1 p^{z-1} + a_2 p^{z-2} + \dots + a_{z-1} p + a_z = 0, \quad (6)$$

z – порядок системы.

Вычисления корней такого уравнения может представлять значительные трудности, особенно, если $z \geq 3$, поэтому большое значение имеют методы, позволяющие, не решая само характеристическое уравнение, установить устойчивость системы. Составим матрицу Якоби, вычисляя частных производных системы уравнений первого приближения (3).

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & a_{15} & 0 & 0 & 0 & a_{19} & a_{1,10} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & a_{26} & 0 & 0 & a_{29} & a_{2,10} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 & a_{37} & 0 & a_{39} & a_{3,10} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 & 0 & a_{48} & a_{49} & a_{4,10} \\ a_{51} & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 & 0 & 0 & a_{59} & a_{5,10} \\ 0 & a_{62} & 0 & 0 & 0 & a_{66} & 0 & 0 & a_{69} & a_{6,10} \\ 0 & 0 & a_{73} & 0 & 0 & 0 & a_{77} & 0 & a_{79} & a_{7,10} \\ 0 & 0 & 0 & a_{84} & 0 & 0 & 0 & a_{88} & a_{89} & a_{8,10} \\ a_{91} & a_{92} & a_{93} & a_{94} & a_{95} & a_{96} & a_{97} & a_{98} & a_{99} & a_{9,10} \\ a_{10,1} & a_{10,2} & a_{10,3} & a_{10,4} & a_{10,5} & a_{10,6} & a_{10,7} & a_{10,8} & a_{10,9} & a_{10,10} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где $a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = -\frac{1}{16} \frac{v^2 \omega_2^2}{\omega_1} A^* A_0 \cos \theta^* - \tilde{n}_0 - \frac{3}{4} \tilde{n}_0 \tilde{h}_0^* A_0^2$,

$$\begin{aligned}
a_{15} = a_{26} = a_{37} = a_{48} = a_{1,10} = a_{2,10} = a_{3,10} = a_{4,10} &= -\frac{1}{4} \frac{v^2 \omega_2^2}{\omega_1} A^* \left(1 - \frac{1}{8} A_0^2\right) \sin \theta^*, \\
a_{19} = a_{29} = a_{39} = a_{49} &= \frac{1}{4} \frac{v^2 \omega_2^2}{\omega_1} \left(1 - \frac{1}{8} A_0^2\right) \cos \theta^*, \\
a_{51} = a_{62} = a_{73} = a_{84} &= -\frac{3}{4} \beta_1 \omega_1 A_0 + \frac{1}{4} \frac{v^2 \omega_2^2}{\omega_1} A^* \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{A_0^2}\right) \sin \theta^*, \\
a_{55} = a_{66} = a_{77} = a_{88} = a_{5,10} = a_{6,10} = a_{7,10} = a_{8,10} &= -\frac{1}{4} \frac{v^2 \omega_2^2}{\omega_1} \frac{A^*}{A_0} \left(1 - \frac{3}{8} A_0^2\right) \cos \theta^*, \\
a_{59} = a_{69} = a_{79} = a_{89} &= -\frac{1}{4} \frac{v^2 \omega_2^2}{\omega_1} \frac{1}{A_0} \left(1 - \frac{3}{8} A_0^2\right) \sin \theta^*, \\
a_{91} = a_{92} = a_{93} = a_{94} &= \frac{1}{4} \sigma \mu_0 \omega_2 \left(1 - \frac{3}{8} A_0^2\right) \cos \theta^*, \\
a_{95} = a_{96} = a_{97} = a_{98} = \frac{1}{4} A_{9,10} &= -\frac{1}{4} \sigma \mu_0 \omega_2 A_0 \left(1 - \frac{1}{8} A_0^2\right) \sin \theta^*, \\
a_{99} = -\tilde{n} - \frac{3}{4} \tilde{n} \tilde{h}^* A^{*2}, a_{10,1} = a_{10,2} = a_{10,3} = a_{10,4} &= -\frac{1}{4} \sigma \mu_0 \omega_2 \frac{1}{A^*} \left(1 - \frac{3}{8} A_0^2\right) \sin \theta^*, \\
a_{10,5} = a_{10,6} = a_{10,7} = a_{10,8} &= \frac{1}{4} A_{10,10} = -\frac{1}{4} \sigma \mu_0 \omega_2 \frac{A_0}{A^*} \left(1 - \frac{1}{8} A_0^2\right) \cos \theta^*, \\
a_{10,9} &= \frac{3}{4} \beta_2 \omega_2 A^* + \sigma \mu_0 \omega_2 \frac{A_0}{A^{*2}} \left(1 - \frac{1}{8} A_0^2\right) \sin \theta^*.
\end{aligned}$$

Выделим в матрице одинаковые коэффициенты и заменим индексы коэффициентов младшими из них. Тогда уравнения возмущенного движения примут вид:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{A}}_1 &= a_{11} \tilde{A}_1 + a_{15} \tilde{\theta}_1 + a_{19} \tilde{A} + a_{15} \tilde{\theta}, & \dot{\tilde{A}}_2 &= a_{11} \tilde{A}_2 + a_{15} \tilde{\theta}_2 + a_{19} \tilde{A} + a_{15} \tilde{\theta}, \\
\dot{\tilde{A}}_3 &= a_{11} \tilde{A}_3 + a_{15} \tilde{\theta}_3 + a_{19} \tilde{A} + a_{15} \tilde{\theta}, & \dot{\tilde{A}}_4 &= a_{11} \tilde{A}_4 + a_{15} \tilde{\theta}_4 + a_{19} \tilde{A} + a_{15} \tilde{\theta}, \\
\dot{\tilde{\theta}}_1 &= a_{51} \tilde{A}_1 + a_{55} \tilde{\theta}_1 + a_{59} \tilde{A} + a_{55} \tilde{\theta}, & \dot{\tilde{\theta}}_2 &= a_{51} \tilde{A}_2 + a_{55} \tilde{\theta}_2 + a_{59} \tilde{A} + a_{55} \tilde{\theta}, \\
\dot{\tilde{\theta}}_3 &= a_{51} \tilde{A}_3 + a_{55} \tilde{\theta}_3 + a_{59} \tilde{A} + a_{55} \tilde{\theta}, & \dot{\tilde{\theta}}_4 &= a_{51} \tilde{A}_4 + a_{55} \tilde{\theta}_4 + a_{59} \tilde{A} + a_{55} \tilde{\theta}, \\
\dot{\tilde{A}} &= a_{91} (\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 + \tilde{A}_3 + \tilde{A}_4) + a_{95} (\tilde{\theta}_1 + \tilde{\theta}_2 + \tilde{\theta}_3 + \tilde{\theta}_4) + a_{99} \tilde{A} + 4a_{95} \tilde{\theta}, \\
\dot{\tilde{\theta}} &= a_{10,1} (\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 + \tilde{A}_3 + \tilde{A}_4) + a_{10,5} (\tilde{\theta}_1 + \tilde{\theta}_2 + \tilde{\theta}_3 + \tilde{\theta}_4) + a_{10,9} \tilde{A} + 4a_{10,5} \tilde{\theta}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Полученная система из десяти дифференциальных уравнений первого порядка имеет линейно зависимые столбцы (второй и четвертый), что значительно усложняет исследование устойчивости, поскольку определитель матрицы будет равняться нулю. Выход из данной ситуации предложен в работе [8]. Для этого необходимо разделить систему (8) на три системы. Первые две системы получатся путем попарного вычитания и сложения первых восьми уравнений возмущенного движения, а третья система будет состоять из двух последних уравнений системы (8).

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1) = a_{11}(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1) + a_{15}(\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1) \\ \frac{d}{d\tau}(\tilde{A}_4 - \tilde{A}_3) = a_{11}(\tilde{A}_4 - \tilde{A}_3) + a_{15}(\tilde{\theta}_4 - \tilde{\theta}_3) \\ \frac{d}{d\tau}(\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1) = a_{51}(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1) + a_{55}(\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1) \\ \frac{d}{d\tau}(\tilde{\theta}_4 - \tilde{\theta}_3) = a_{51}(\tilde{A}_4 - \tilde{A}_3) + a_{55}(\tilde{\theta}_4 - \tilde{\theta}_3) \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}(\tilde{A}_2 + \tilde{A}_1) = a_{11}(\tilde{A}_2 + \tilde{A}_1) + a_{15}(\tilde{\theta}_2 + \tilde{\theta}_1) + 2a_{19}\tilde{A} + 2a_{15}\tilde{\theta} \\ \frac{d}{d\tau}(\tilde{A}_4 + \tilde{A}_3) = a_{11}(\tilde{A}_4 + \tilde{A}_3) + a_{15}(\tilde{\theta}_4 + \tilde{\theta}_3) + 2a_{19}\tilde{A} + 2a_{15}\tilde{\theta} \\ \frac{d}{d\tau}(\tilde{\theta}_2 + \tilde{\theta}_1) = a_{51}(\tilde{A}_2 + \tilde{A}_1) + a_{55}(\tilde{\theta}_2 + \tilde{\theta}_1) + 2a_{59}\tilde{A} + 2a_{55}\tilde{\theta} \\ \frac{d}{d\tau}(\tilde{\theta}_4 + \tilde{\theta}_3) = a_{51}(\tilde{A}_4 + \tilde{A}_3) + a_{55}(\tilde{\theta}_4 + \tilde{\theta}_3) + 2a_{59}\tilde{A} + 2a_{55}\tilde{\theta} \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{A}} = a_{91}(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 + \tilde{A}_3 + \tilde{A}_4) + a_{95}(\tilde{\theta}_1 + \tilde{\theta}_2 + \tilde{\theta}_3 + \tilde{\theta}_4) + a_{99}\tilde{A} + 4a_{95}\tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}} = a_{10,1}(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 + \tilde{A}_3 + \tilde{A}_4) + a_{10,5}(\tilde{\theta}_1 + \tilde{\theta}_2 + \tilde{\theta}_3 + \tilde{\theta}_4) + a_{10,9}\tilde{A} + 4a_{10,5}\tilde{\theta} \end{cases} \quad (11)$$

Систему уравнений (9) можно разложить на две замкнутые независимые подсистемы для разностей возмущений, которые можно исследовать на устойчивость:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = a_{11}\xi_1 + a_{15}\xi_3 \\ \dot{\xi}_3 = a_{51}\xi_1 + a_{55}\xi_3 \end{cases} \quad (9a) \quad \begin{cases} \dot{\xi}_2 = a_{11}\xi_2 + a_{15}\xi_4 \\ \dot{\xi}_3 = a_{51}\xi_2 + a_{55}\xi_4 \end{cases} \quad (9б)$$

где $\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1 = \xi_1$, $\tilde{A}_4 - \tilde{A}_3 = \xi_2$, $\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1 = \xi_3$, $\tilde{\theta}_4 - \tilde{\theta}_3 = \xi_4$.

В

уравнениях (10) и (11) произведем замену переменных

$\tilde{A}_2 + \tilde{A}_1 = \eta_1$, $\tilde{A}_4 + \tilde{A}_3 = \eta_2$, $\tilde{\theta}_2 + \tilde{\theta}_1 = \eta_3$, $\tilde{\theta}_4 + \tilde{\theta}_3 = \eta_4$, затем попарно вычтем и сложим

уравнения системы (10), в результате получим одну систему для разностей возмущений (12)

и систему (13) для суммы возмущений с добавкой уравнений системы (11).

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}(\eta_2 - \eta_1) = a_{11}(\eta_2 - \eta_1) + a_{15}(\eta_4 - \eta_3) \\ \frac{d}{d\tau}(\eta_4 - \eta_3) = a_{51}(\eta_2 - \eta_1) + a_{55}(\eta_4 - \eta_3) \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}(\eta_2 + \eta_1) = a_{11}(\eta_2 + \eta_1) + a_{15}(\eta_4 + \eta_3) + 4a_{19}\tilde{A} + 4a_{15}\tilde{\theta} \\ \frac{d}{d\tau}(\eta_4 + \eta_3) = a_{51}(\eta_2 + \eta_1) + a_{55}(\eta_4 + \eta_3) + 4a_{59}\tilde{A} + 4a_{55}\tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{A}} = a_{91}(\eta_2 + \eta_1) + a_{95}(\eta_4 + \eta_3) + a_{99}\tilde{A} + 4a_{95}\tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}} = a_{10,1}(\eta_2 + \eta_1) + a_{10,5}(\eta_4 + \eta_3) + a_{10,9}\tilde{A} + 4a_{10,5}\tilde{\theta} \end{cases} \quad (13)$$

Таким образом, система (10), (11) распадается на две замкнутые независимые подсистемы (12) и (13), состоящие из двух и четырех уравнений соответственно. Проведем замену переменных $\eta_2 - \eta_1 = \chi_1$, $\eta_4 - \eta_3 = \chi_3$, $\eta_2 + \eta_1 = \chi_2$, $\eta_4 + \eta_3 = \chi_4$, и уравнения (12) и (13) примут вид:

$$\begin{cases} \dot{\chi}_1 = a_{11}\chi_1 + a_{15}\chi_3 \\ \dot{\chi}_3 = a_{51}\chi_1 + a_{55}\chi_3 \end{cases} \quad (14) \quad \begin{cases} \dot{\chi}_2 = a_{11}\chi_2 + a_{15}\chi_4 + 4a_{19}\tilde{A} + 4a_{15}\tilde{\theta} \\ \dot{\chi}_4 = a_{51}\chi_2 + a_{55}\chi_4 + 4a_{59}\tilde{A} + 4a_{55}\tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{A}} = a_{91}\chi_2 + a_{95}\chi_4 + a_{99}\tilde{A} + 4a_{95}\tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}} = a_{10,1}\chi_2 + a_{10,5}\chi_4 + a_{10,9}\tilde{A} + 4a_{10,5}\tilde{\theta} \end{cases} \quad (15)$$

В уравнениях (15) второй и четвертый столбцы зависимы, поэтому для дальнейшего исследования необходимо сложить эти столбцы, а затем мы можем сложить вторую и четвертую строки. В результате получим систему из трех уравнений без линейной зависимости:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}\chi_2 = a_{11}\chi_2 + a_{15}(\chi_4 + 4\tilde{\theta}) + 4a_{19}\tilde{A} \\ \frac{d}{d\tau}(\chi_4 + 4\tilde{\theta}) = (a_{51} + 4a_{10,1})\chi_2 + (a_{55} + 4a_{10,5})(\chi_4 + 4\tilde{\theta}) + (4a_{59} + 4a_{10,9})\tilde{A} \\ \frac{d}{d\tau}\tilde{A} = a_{91}\chi_2 + a_{95}(\chi_4 + 4\tilde{\theta}) + a_{99}\tilde{A} \end{cases} \quad (15a)$$

Приведем полученную систему к более компактному виду, заменив выражение $\chi_4 + 4\tilde{\theta}$ переменной χ_5 :

$$\begin{cases} \dot{\chi}_2 = a_{11}\chi_2 + a_{15}\chi_5 + 4a_{19}\tilde{A} \\ \dot{\chi}_5 = (a_{51} + 4a_{10,1})\chi_2 + (a_{55} + 4a_{10,5})\chi_5 + 4(a_{59} + a_{10,9})\tilde{A} \\ \dot{\tilde{A}} = a_{91}\chi_2 + a_{95}\chi_5 + a_{99}\tilde{A} \end{cases} \quad (15b)$$

В результате системы уравнений (9а), (9б), (14) и (15б) можно исследовать на устойчивость, после чего можно делать вывод об устойчивости системы в целом.

В соответствии с критерием Рауса-Гурвица можно определить устойчивость положения равновесия для систем (9а), (9б) и (14). Для системы 2-го порядка условие устойчивости имеет вид: $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, т. е. все коэффициенты характеристического уравнения должны быть положительными. Поскольку коэффициенты уравнений (9а), (9б) и (14) равны, можно составить одно характеристическое уравнение второго порядка для этих систем:

$$p^2 - (a_{11} + a_{55})p + a_{11}a_{55} - a_{15}a_{51} = 0, \quad (16)$$

где $a_0 = 1$, $a_1 = -(a_{11} + a_{55})$, $a_2 = a_{11}a_{55} - a_{15}a_{51}$.

Для исследования устойчивости системы (15б) снова воспользуемся критерием Рауса-Гурвица и составим характеристическое уравнение третьего порядка в соответствии с (6), которое примет вид:

$$p^3 - (a_{11} + a_{55} + a_{99} + 4a_{10,5})p^2 + (a_{11}a_{55} + 4a_{11}a_{10,5} + a_{11}a_{99} + a_{55}a_{99} + 4a_{99}a_{10,5} - 4a_{59}a_{95} - 4a_{95}a_{10,9} - a_{15}a_{51} - 4a_{15}a_{10,1} - 4a_{19}a_{91})p - (a_{11}a_{55}a_{99} + 4a_{11}a_{99}a_{10,5} - 4a_{11}a_{59}a_{95} - 4a_{11}a_{95}a_{10,9} - a_{15}a_{51}a_{99} - 4a_{15}a_{99}a_{10,1} + 4a_{15}a_{59}a_{91} + 4a_{15}a_{91}a_{10,9} + 4a_{19}a_{51}a_{95} + 16a_{19}a_{95}a_{10,1} - 4a_{19}a_{55}a_{91} - 16a_{19}a_{91}a_{10,5}), \quad (17)$$

где $a_0 = 1$, $a_1 = -(a_{11} + a_{55} + a_{99} + 4a_{10,5})$,

$$a_2 = (a_{11}a_{55} + 4a_{11}a_{10,5} + a_{11}a_{99} + a_{55}a_{99} + 4a_{99}a_{10,5} - 4a_{59}a_{95} - 4a_{95}a_{10,9} - a_{15}a_{51} - 4a_{15}a_{10,1} - 4a_{19}a_{91}),$$

$$a_3 = -(a_{11}a_{55}a_{99} + 4a_{11}a_{99}a_{10,5} - 4a_{11}a_{59}a_{95} - 4a_{11}a_{95}a_{10,9} - a_{15}a_{51}a_{99} - 4a_{15}a_{99}a_{10,1} + 4a_{15}a_{59}a_{91} + 4a_{15}a_{91}a_{10,9} + 4a_{19}a_{51}a_{95} + 16a_{19}a_{95}a_{10,1} - 4a_{19}a_{55}a_{91} - 16a_{19}a_{91}a_{10,5}).$$

В соответствии с критерием Рауса-Гурвица для системы 3-го порядка условие устойчивости имеет вид: $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, т. е. все коэффициенты характеристического уравнения должны быть положительными и дополнительное условие $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$.

Результаты и их обсуждение

Проведем анализ полученных результатов на амплитудно-частотной характеристике рабочего органа грохота при различных параметрах системы. На рисунке 2 показаны резонансная кривая 1, соответствующую комбинационному резонансу, при настройке $\varepsilon=0.02$, $\nu=0.25$, $\tilde{n}_0 = 0.02$, $\tilde{n} = 0.025$, $\tilde{h}_0 = 0.03$, $\tilde{h} = 0.045$, $\beta_1=1/6$, $\beta_2=0.15$, и резонансная кривая 2, соответствующую настройке $\varepsilon=0.02$, $\nu=0.25$, $\tilde{n}_0 = 0.02$, $\tilde{n} = 0.14$, $\tilde{h}_0 = 0.02$, $\tilde{h} = 0.06$, $\beta_1=1/6$, $\beta_2=0$.

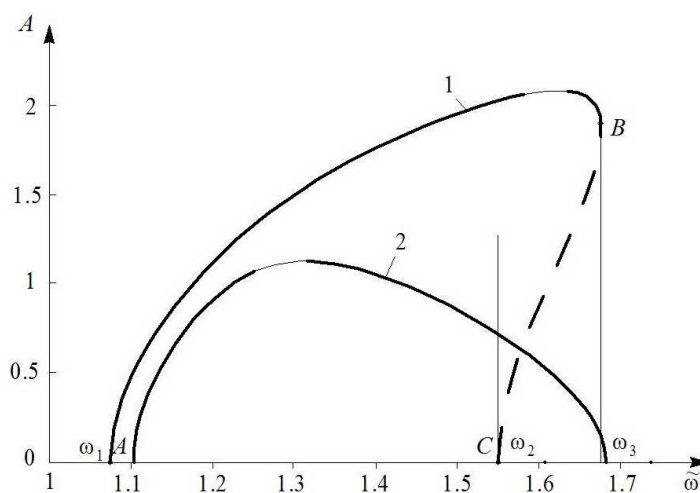


Рис. 2. АЧХ рабочего органа. Границы устойчивости

Все коэффициенты характеристического уравнения (16) для резонансной кривой 2 получились положительными, что говорит об устойчивости положения равновесия резонансного режима работы. Для кривой 1 на участке от А до В коэффициенты

характеристического уравнения имеют положительные значения, а на участке от B до C – отрицательные значения. Следовательно, на участке AB положение равновесия устойчиво, а на участке BC , отмеченном пунктирной линией, – неустойчиво. Тривиальное решение от ω_1 до ω_2 неустойчиво.

После определения коэффициентов характеристического уравнения (17) и проверки дополнительного условия устойчивости можно сделать вывод, что кривая 2 является устойчивой на всем участке. Все точки левой ветви резонансной кривой 1 (от A до B) оказались устойчивыми. Стационарное решение на интервале $\omega_2 < \omega < \omega_3$ является многозначным. Из трех возможных значений амплитуды установившихся колебаний устойчивым колебаниям соответствует тривиальное решение (колебания с нулевой амплитудой) и нетривиальное решение с наибольшей амплитудой, а неустойчивым – с наименьшей амплитудой (участок кривой BC). Сплошными линиями показаны асимптотически устойчивые решения, а штриховыми – неустойчивые.

Обобщая результаты, полученные при исследовании устойчивости систем уравнений (9а), (9б), (14) и (15б), можно сделать вывод, что в целом система является устойчивой.

Заключение

Точка $\omega = \omega_1$ является точкой бифуркации, при переходе которой положение равновесия теряет устойчивость и возникает неравновесное состояние – периодические колебания. Этот вид потери устойчивости называется мягкой потерей устойчивости, поскольку устанавливающийся колебательный режим при малой закритичности $\varepsilon^* = \omega - \omega_1$ (отличие параметра ω от критического значения ω_1) мало отличается от равновесия. При переходе ε^* через нуль устойчивый фокус становится неустойчивым, и рождается устойчивый предельный цикл малой амплитуды, что соответствует динамической бифуркации Андронова-Хопфа.

Проделанный анализ показал, что стационарный режим работы вибрационного грохота с параметрическими вибровозбудителями является устойчивым. Полученные результаты подтверждаются проведенными экспериментами, что говорит о достоверности предложенного метода.

Список литературы

1. Антипов В.И., Денцов Н.Н., Кошелев А.В. Энергетические соотношения в вибрационной машине на многократном комбинационном параметрическом резонансе // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2013. № 5(1). С. 188-194.
2. Антипов В.И., Денцов Н.Н., Кошелев А.В. Динамика параметрически возбуждаемой вибрационной машины с изотропной упругой системой // Фундаментальные исследования.

2014. № 8(5). С. 1037–1042

3. Антипов В.И. Динамика вибрационных машин с параметрическим возбуждением // Автореф. диссертации на соиск. уч. ст. д. т. наук. – Нижний Новгород. Изд. НГТУ. 2001. 38 с.
4. Антипов В.И. Динамика вибрационных машин с комбинационным параметрическим возбуждением // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2001. № 2. С. 13–17.
5. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
6. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971. 894 с.
7. Денцов Н.Н. Динамика вибрационного грохота на многократном комбинационном параметрическом резонансе // Фундаментальные исследования. 2015. № 4.
8. Ланда П. С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М., 1980. 360 с.
9. Патент № 2410167 РФ МКИ В 06 В 1/16. Способ возбуждения резонансных механических колебаний и устройство для его осуществления (варианты). Антипов В.И., Антипова Р.И., Наумов В.И., Палашова И.В. / (РФ) опубл. 27.01.2011, Бюл. № 3.

Рецензенты:

Панов А. Ю., д.т.н., заведующий кафедрой «Теоретическая и прикладная механика», ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева», г. Нижний Новгород;

Кретинин О.В., д.т.н., кафедра «Автоматизация машиностроения», ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева», г. Нижний Новгород.