УДК 517.165

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ПРИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ТОЖДЕСТВ И НЕРАВЕНСТВ

Агаханов С.А.[1], Амиралиев А.Д.[1], Гаджиагаев Ш.С.[1], Рагимханова Г.С.[1]

[1]ФГБОУ ВПО «Дагестанский государственный педагогический университет», г. Махачкала, Россия (367003, Республика Дагестан, г. Махачкала, ул. М. Ярагского, 57), e-mail: gulnara_6789@mail.ru

Часто при решении математических задач используют тождественные преобразования и доказательство неравенств. Существуют различные способы доказательств тождеств и неравенств. Здесь мы решаем эту задачу с использованием производной и тем самым расширяем круг задач, решаемых как в школе, так и в вузе при изучении темы «Производная и ее применение». Используя теоремы монотонности и постоянства функции на отрезке из анализа, приведены примеры на доказательство тождеств и неравенств. Как видно, применение производной упрощает соответствующие доказательства. Применяя монотонность функции на отрезке, доказана теорема о выполнении неравенства. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях, связанных с вопросами получения верхних и нижних оценок в теории функций и для решения задач на нахождение наибольшего или наименьшего значения функции на отрезке.

Ключевые слова: производная, тождество, неравенство.

THE USE OF THE DERIVATIVE IN THE PROOF OF IDENTITIES AND INEQUALITIES

Agakhanov S.A.[1], Amiraliev A.D.[1], Gadzhiagaev S.S.[1], Ragimkhanova G.S.[1]

[1]Dagestan state pedagogical University, Makhachkala, Russia (367003, Republic of Dagestan, Makhachkala, M. Yaragskogo street, 57), e-mail: gulnara_6789@mail.ru

Often when solving mathematical tasks used identical transformation and proof of inequalities. There are different ways proofs of identities and inequalities. Here we solve this problem with the use of the derivative and, thereby, expanding the range of problems to be solved both in school and in the University under the topic "the Derivative and its applications". Using theorem monotonicity and continuity of the function from the analysis, the examples given in the proof of identities and inequalities. As can be seen, the use of derivative simplifies the relevant evidence. Using the monotonicity of the function, the theorem, proving the inequality. The obtained results can be used in further studies related to the issues of obtaining upper and lower bounds in the theory of functions and to solve problems of finding the greatest or least value of a function on an interval.

Keywords: derivative, identity, inequality.

Решение многих задач математики опирается на доказательство тождеств и неравенств. Для их доказательства существуют различные способы. Изучая в школе и в вузе тему «Производная и ее применение», мы рассматриваем такие вопросы, как монотонность функции, знакопостоянство функции, экстремумы функций. Здесь мы хотим расширить круг задач, которые можно решить, применяя производную, для чего используем теоремы из математического анализа. Тем более что методы их решения можно использовать и при решении задач из различных разделов математики.

Теорема 1. Пусть на отрезке $[a;b]$ задана функция $f(x)$. Для того, чтобы эта функция была постоянной на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках отрезка $[a;b]$ существовала производная $f'(x)$, и чтобы она всюду на отрезке $[a;b]$ была равна нулю [6].

Используя эту теорему, можно доказать тождества вида $f(x)=c_0$, на некотором промежутке X. Для чего достаточно показать, что на этом промежутке $f(x)=c$ ($c-$ константа) и для некоторого x_0 из этого промежутка $f(x_0)=c_0$.

Рассмотрим следующие примеры.

Пример 1. Доказать тождество

$$arctg\ x + arcctg\ x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in (-\infty; \infty) \qquad (1)$$

Для доказательства этого тождества рассмотрим следующую функцию

$$f(x) = arctg\ x + arcctg\ x, \quad x \in (-\infty; \infty)$$

Эта функция дифференцируема в промежутке $(-\infty; \infty)$. Найдем $f'(x)$ и покажем, что $f'(x)=0$ в промежутке $(-\infty; \infty)$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Значит, по теореме 1

$$f(x) = c \ \ (c - \text{константа}).$$

Для нахождения c вычислим значение функции $f(x)$ в точке $x_0 = 0$. Имеем

$$f(x_0) = arctg\ 0 + arcctg\ 0 = \frac{\pi}{2}\ .$$

Отсюда следует, что

$$c = \frac{\pi}{2}\ .$$

Значит

$$arctg\ x + arcctg\ x = \frac{\pi}{2}, \text{ для всех } x \in (-\infty; \infty).$$

Тождество (1) доказано.

Пример 2. Доказать тождество

$$2arctg\ x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} \pi\ , & x \ge 1 \\ -\pi, & x \le -1 \end{cases} \qquad (2)$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = 2arctg\ x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}\ .$$

Находим

$$f'(x)=2\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x}{\left(1+x^2\right)^2}}}\cdot\frac{2\left(1-x^2\right)-4x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}}\cdot\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}=$$

$$=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1+x^2}{\sqrt{1+2x^2+x^4-4x^2}}\cdot\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2}{1+x^2}\cdot\left(1+\frac{1-x^2}{\sqrt{1-2x^2+x^4}}\right)=\frac{2}{1+x^2}\cdot\left(1+\frac{1-x^2}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^2}}\right)=$$

$$=\frac{2}{1+x^2}\left(1+\frac{1-x^2}{\left|1-x^2\right|}\right)=0 \text{, если } |x|>1.$$

Отсюда следует, что $f(x)=c$ ($c-$ константа) для $|x|>1$. Для нахождения c используем непрерывность функции

$$f(x)=2arctg\ x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$$

на всей числовой оси и равенства

$$f(1)=2arctg\ (1)+\arcsin\frac{2}{1+1^2}=2\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

$$f(-1)=2arctg\ (-1)+\arcsin\frac{2\cdot(-1)}{1+(-1)^2}=-2\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=-\pi\ .$$

Этим тождество (2) доказано.

Пример 3. Доказать тождество

$$arctg\ \frac{1+x}{1-x}-arctg\ x=\frac{\pi}{4}, \quad x\neq 1 \qquad (3)$$

Рассмотрим функцию

$$f(x)=arctg\ \frac{1+x}{1-x}-arctg\ x$$

Эта функция определена и дифференцируема для всех $x\neq 1$.

Находим $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{(1-x)^2}{(1-x)^2+(1-x)^2}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}-\frac{1}{1+x^2}=$$

$$=\frac{2}{2+2x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0 \text{, если } x\neq 1.$$

Отсюда следует, что $f(x)=c$ ($c-$ константа). Для нахождения с, находим

$$f(0)=arctg\,1-arcctg\ 0=\frac{\pi}{4}\ .$$

Этим тождество (3) доказано.

Такой способ доказательства тождеств носит некоторый самостоятельный характер, который можно использовать при доказательстве других тождеств.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[a;b]$. Если на этом отрезке выполняется условие $f'(x)\geq 0$ $(f'(x)\leq 0)$, то на этом отрезке функция $f(x)$ возрастающая (убывающая) и для любого x из отрезка $[a;b]$ справедливы соотношения:

$$f(a)\leq f(x)\leq f(b) \quad (f(a)\geq f(x)\geq f(b)) \text{ (см. рис.1) [6].}$$

В этой теореме точек отрезка $[a;b]$, где $f'(x)=0$, конечное число.

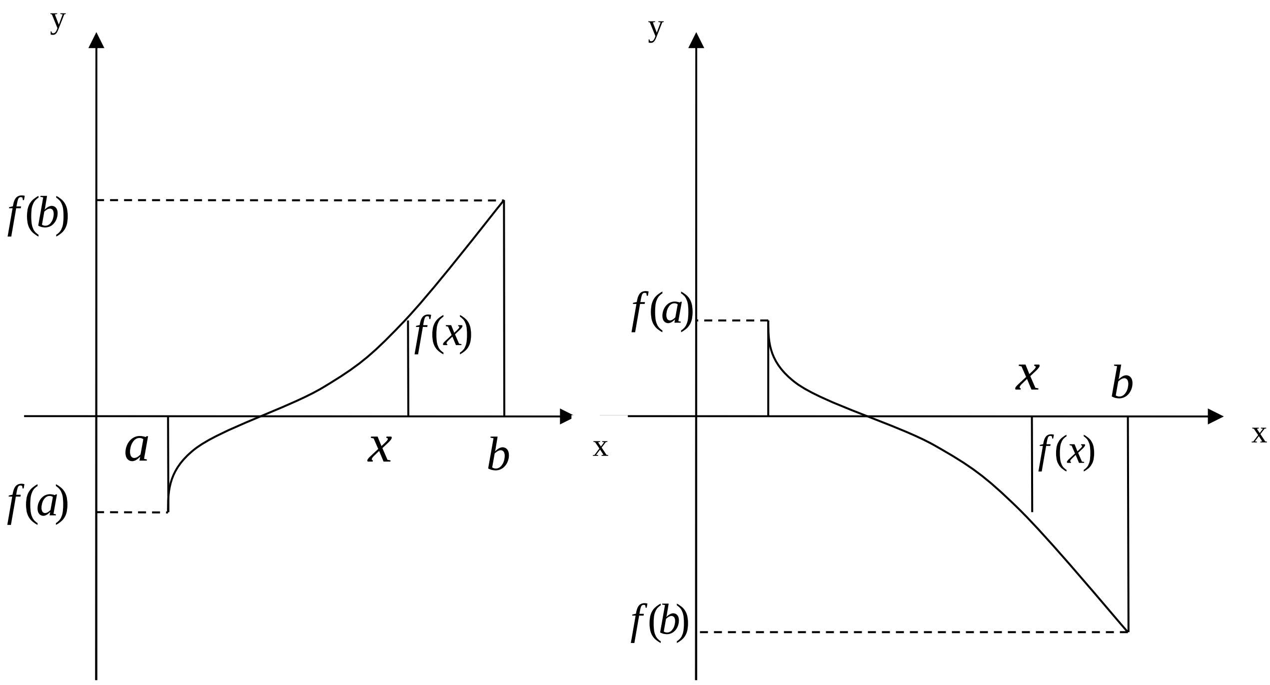

Рис. 1.

Используя эту теорему, докажем следующие функциональные неравенства.

Рассмотрим примеры.

Пример 3. Справедливо неравенство

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi}x\,,\ 0\leq x\leq \frac{\pi}{2} \tag{4}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x)=\frac{\sin x}{x}$$

Так как эта функция теряет смысл при $x=0$, то мы будем рассматривать $\varphi(x)$ в промежутке $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$. Здесь $\varphi(x)$ дифференцируема и

$$\varphi'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{x-tg\,x}{x^2}\cos x\ ,\quad 0<x<\frac{\pi}{2}\,.$$

Но при $0<x<\frac{\pi}{2}$ будет $x<tg\,x$ (это неравенство можно доказать, используя монотонность функции $f(x)$ в данном промежутке). Значит, в промежутке $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ $\varphi'(x)<0$, и $\varphi(x)=\frac{\sin x}{x}$ убывает. Значит $\varphi(x)>\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ для $0<x<\frac{\pi}{2}$ или $\frac{\sin x}{x}>\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}$, $\sin x>\frac{2}{\pi}$. Отсюда, учитывая то, что при $x=0$ и $x=\frac{\pi}{2}$ в (4) выполняются равенства, имеем

$$\varphi(x)\ge\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}\,.$$

Иначе говоря,

$$\sin x\ge\frac{2}{\pi}x\ ,\ x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right].$$

Это неравенство можно было доказать и графически.

Пример 4. Справедливо неравенство

$$\sin x+tg\,x\ge 2x\ ,\quad 0\le x<\frac{\pi}{2}\,. \qquad (5)$$

Рассмотрим функцию

$$f(x)=2\sin x+tg\,x-3x\text{, для }0\le x<\frac{\pi}{2}\,.$$

Она дифференцируема в указанном промежутке и её производная будет

$$f'(x)=2\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-3=\frac{2\cos^3 x-3\cos^2 x+1}{\cos^2 x}=\frac{\left(2\cos^3 x-2\cos^2 x\right)+\left(1-\cos^2 x\right)}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{2\cos^2 x(\cos x-1)+\left(1-\cos^2 x\right)}{\cos^2 x}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)+2\cos^2 x(\cos x-1)}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{(1-\cos x)\cdot\left(1+\cos x-2\cos^2 x\right)}{\cos^2 x}\,.$$

Здесь

$$1-\cos x\ge 0\ ,\quad \cos^2 x>0$$

и

$$1+\cos x-2\cos^2 x\ge 0\ \text{ при }\ 0\le x<\frac{\pi}{2}\,;$$

(это следует из того, что квадратный трехчлен $-2t^2+t+1$ на отрезке $[0;1]$ принимает неотрицательные значения).

Поэтому $f'(x)\geq 0$, т.е. $f(x)$ – возрастающая функция, значит

$$f(x)\geq 0 \text{ или } 2\sin x+tg\,x\geq 3x \text{, при } 0\leq x<\frac{\pi}{2}.$$

Отсюда, в частности, вытекает:

$$\sin x+tg\,x\geq 3x-\sin x>3x-x=2x,$$

т. е.

$$\sin x+tg\,x\geq 2x,\quad 0\leq x<\frac{\pi}{2}.$$

(Здесь мы использовали неравенство $\sin x\leq x$, для $x\in[0;+\infty)$. Это неравенство также можно получить, используя монотонность функции $f(x)=x-\sin x$).

Часто на школьных олимпиадах по математике встречаются задачи на сравнение двух чисел, заданных в виде степеней. Для решения этих задач можно использовать следующую теорему.

Теорема 3. Пусть для чисел a и b выполняется условие $e\leq a<b$. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$a^b>b^a \tag{6}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x)=x-a\log_a x$, $x\in[a;b]$. Эта функция определена и дифференцируема на отрезке $[a;b]$ и

$$f'(x)=1-\frac{a}{x\ln a}.$$

Так как $x\geq a$ и $a\geq e$ (тогда $\ln a\geq 1$), значит $\frac{a}{x\ln a}\leq 1$.

Таким образом

$$f'(x)=1-\frac{a}{x\ln a}\geq 0.$$

Отсюда, используя теорему 2, следует, что $f(x)=x-a\log_a x$ возрастающая на отрезке $[a;b]$ функция.

Используя свойство возрастающей функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, имеем

$$f(a)<f(b).$$

У нас

$$f(a)=a-a\log_a a=a-a=0.$$

$$f(b)=b-a\log_a b=b-\log_a b^a.$$

Отсюда

$$0 < b - \log_a b^a \text{ или } b > \log_a b^a .$$

Потенцируя это неравенство, получим

$$a^b > b^a .$$

Что и требовалось доказать.

Значит, при условиях теоремы из двух степеней та степень больше, где показатель степени больше. Нетрудно заметить, что при $a = 2$ и $b = 3$ неравенство (6) не выполняется.

Хотелось бы отметить, что теорему 2 можно использовать при выполнения задания ЕГЭ части В на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Список литературы

1.Агаханов С.А. Нахождение наименьшего и наибольшего значений функций на заданном отрезке // Материалы ежегодной научно-практ. конф. – Махачкала: Институт (филиал) МГМУ, 2012.-С. 102-105.

2.Вавилов В.В., Мельников И.И. и др. Задачи по математике. Уравнения и неравенства.– М.: Наука, 1987. – 432 с.

3.Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие. –13-е изд., испр. – М.: Моск. ун-т, ЧеРо,1997. – 624 с.

4.Колмогоров А.Н.и др. Алгебра и начала анализа 10-11 класс.-17-е изд.-М.: Просвещение, 2008.- 384 с.

5.Лысенко Ф.Ф. под ред. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2015. – Книга 2. – Ростов-на-Дону: Легион-М, 2014. –352 с.

6.Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.- М.: ФИЗМАТЛИТ, 5-е изд., 2001. – т.1. – 616 с.

Рецензенты:

Рамазанов А.-Р.К., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой математического анализа ФГБОУ ВПО «Дагестанский государственный университет», г. Махачкала;

Баламирзоев А.Г., д.т.н., профессор, ФГБОУ ВПО «Дагестанский государственный технический университет», г. Махачкала.