УДК 519.87

МОДЕЛЬ СОСТОЯНИЯ НОМЕРОВ ГОСТИНИЧНОГО КОМПЛЕКСА НА ОСНОВЕ АППАРАТА МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ

Карпунин А.А.[1], Соро Мамаду [2]

[1]*ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана» (МГТУ им. Н.Э. Баумана), Москва, Россия (105005, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5), e-mail: karpunin@bmstu.ru*
[2]*ФГБОУ ВПО «Российский университет дружбы народов» (РУДН), Москва, Россия (117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д.6), e-mail: sorosocialiste@mail.ru*

Рассмотрены вопросы математического описания состояний номерного фонда гостиничного комплекса на основе формирования графа состояний номера и применения подходов исследования операций. Получено описание матрицы смежности графа состояний номера. Сформирована модель Марковского процесса дискретного времени, описывающая события, связанные с использованием номера гостиничного комплекса. На основе Марковской цепи непрерывного времени построена динамическая модель в форме Колмогорова – Чепмена, описывающая вероятность нахождения номера в конкретном состоянии. На основе метода динамики средних получена математическая модель ожидания количества номеров одной категории, находящихся в каждом из состояний. Рассматриваются дополнительные условия функционирования модели. Использование данной модели позволит осуществлять прогноз загруженности номерного фонда и потребности в персонале в процессе работы гостиничного комплекса.

Ключевые слова: математическая модель, гостиничный комплекс, Марковская цепь, метод динамики средних, граф.

THE STATE MODEL OF ROOMS OF THE HOTEL COMPLEX ON THE BASIS OF MARKOV CHAINS APPROACH

Karpunin A.A.[1], Soro Mamadu[2]

[1]*Federal State Budget Educational Institution of Higher Professional Education “Bauman Moscow State Technical University” (BMSTU), Moscow, Russia (105005, Moscow, 2-yaBaumanskaya str., 5), e-mail: karpunin@bmstu.ru*
[2]*Federal State Budget Educational Institution of Higher Professional Education “Peoples Friendship University of Russia” (PFUR), Moscow, Russia (117198, Moscow, Mikluho-Maklaya str., 6), e-mail: sorosocialiste@mail.ru*

The problems of mathematical description of the states of room fund of a hotel complex on the basis of formation of the state graph of numbers and operations research approaches are considered. A description ofthe adjacency matrixof the room’s graphstates is received. A model of discrete time Markov process, describingthe events associatedwith the use ofthe roomsof the hotel complex is formed. A dynamic model based on Markov chain of continuous time was constructed in the form of the Chapman – Kolmogorov, describing the probability of a room to be in a particular state, is produced. A mathematical model of expectation value of roomsfor one category thatarein each state is received on the basis ofthe method of dynamics of average.Additional terms of functioning of the model are considered. Usingthis modelwill allow to make a prediction of the room fund load andstaffing requirementsduring operationof the hotel complex.

Keywords: mathematical model, hotel complex, Markov chain, method of dynamics of average, graph.

Введение. Одним из вопросов, который стоит перед разработчиками перспективных информационно-управляющих систем [4, 5] гостиничных комплексов, заключается в необходимости прогнозирования загруженности номерного фонда гостиничного комплекса. В данной работе рассматриваются вопросы исследования операций, сопровождающих гостиничный номер и построения новой математической модели на основе Марковских цепей, которая позволит осуществлять такой прогноз.

Цель работы: разработка новой математической модели функционирования номера гостиничного комплекса на основе аппарата Марковских цепей.

1. Формирование графа состояний номера гостиничного комплекса

Моделирование процессов на основе аппарата Марковских цепей [2, 3, 6] предполагает наличие графа состояний рассматриваемой системы, поэтому необходимо сформировать подобный граф, принимая во внимание цикл обслуживания клиента.

Как известно, граф G представляет собой совокупность множества вершин $V=\{v_i\}$, $i=\overline{1,n}$ и множества соединяющих их ребер $E=\{e_{ik}\}$, $i,k=\overline{1,n}$

$$G=\{V,E\},$$

где n – количество вершин в графе;
i,k – индексы вершин;

В качестве вершин v_i в результате анализа операций, производимых с номером, были выбраны следующие состояния номера гостиничного комплекса (ГК):

v_1 – «номер свободен»;

v_2 – «номер занят клиентом»;

v_3 –«номер освобожден клиентом, требуется уборка»;

v_4 – «в номере производятся ремонтные работы».

В качестве ребер графа e_{ik} в результате анализа были выбраны следующие процессы, сопровождающие переход номера из состояния в состояние (не описаны петли в графе e_{kk}):

e_{12} – заселение клиента в номер;

e_{13} – плановая легкая уборка в номере, когда он простаивает без клиента;

e_{14} – плановый ремонт в номере, когда он свободен от клиентов;

e_{21} – данное ребро отсутствует, поскольку при выселении клиента номер должен пройти стадию уборки, поэтому в графе не представлено;

e_{23} – ежедневная уборка номера в процессе проживания клиента;

e_{24} – срочный ремонт номера в процессе проживания клиента (нештатная ситуация);

e_{31} – освобождения номера для дальнейшего заселения после завершения уборки;

e_{32} – завершение ежедневной уборки в процессе проживания клиента;

e_{34} – в процессе уборки выявлена необходимость ремонта;

e_{41} – переход номера в свободное состояние после проведения планового ремонта;

e_{42} – завершение срочного ремонта в процессе проживания клиента;

e_{43} – уборка номера после завершения ремонтных работ.

Результирующий вид графа состояния номера ГК представлен на рис. 1.

На рис. 1 ребро e_{13} показано пунктиром, поскольку при насыщенном спросе на услуги ГК (спрос клиентов равен или превышает предложение ГК) данный вид операции не потребуется, данное ребро необходимо только при ненасыщенном спросе (когда предложение ГК превышает спрос клиентов на услуги гостиничного сектора).

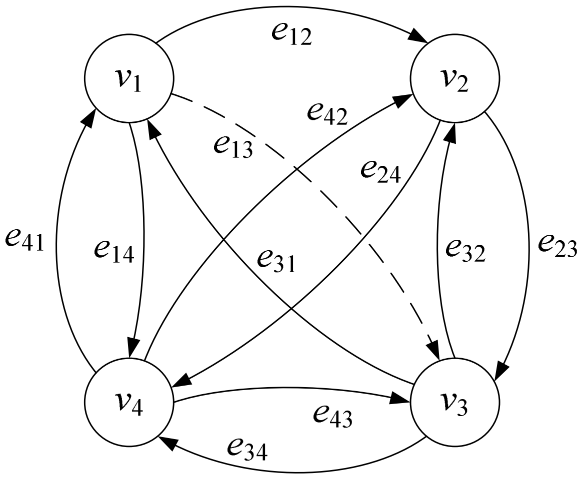

Рис. 1. Граф состояния номера ГК

Матрица смежности, описывающая граф G, представленный на рис. 1, имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Наличие матрицы смежности (1) позволяет удобно хранить граф состояния номера ГК и производить с ним требуемые операции.

Существуют две основные формы представления Марковских цепей: Марковская цепь дискретного и непрерывного времени.

2. Формирование модели Марковской цепи дискретного времени

Зная ежемесячную статистику по загруженности номерного фонда, можно определить среднее время нахождения номера в том или ином состоянии, на основе которого можно вычислить вероятность нахождения номера в каждом из состояний P_1, P_2, P_3, P_4. Можно также определить ежесуточную вероятность перехода номера в то или иное состояние $P_{ik}{}^{(q)}, i,k = \overline{1,n}$, где q – номер дискретного момента времени. Этих данных достаточно для формирования Марковской цепи для номера ГК.

На рис. 2 представлен граф состояния для Марковской цепи дискретного времени.

На рис. 2 за S_i обозначено состояние отдельного номера в терминах Марковских цепей.

В начальный момент времени номер находится в одном вполне конкретном состоянии S_i. Вероятность нахождения номера в данном состоянии $P_i(0)=1,\ i\in\overline{1,n}$. Начальные вероятности для остальных номеров $P_k(0)=0,\ k\neq i$.

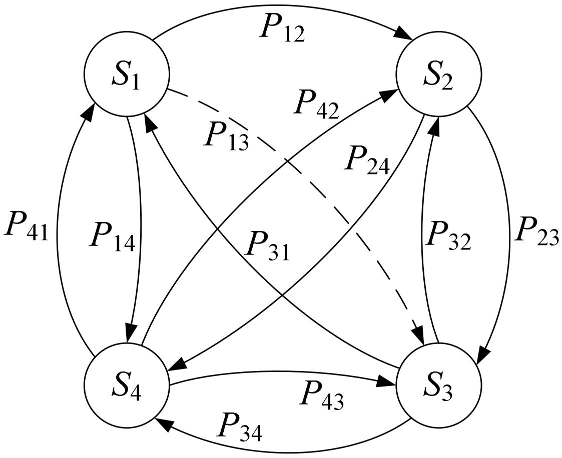

Рис. 2. Марковская цепь дискретного времени, описывающая состояние номера ГК

Матрица вероятностей перехода $\mathbf{P}^{(q)}$ имеет вид

$$\mathbf{P}^{(q)}=\begin{bmatrix} P_{11}^{(q)} & P_{12}^{(q)} & P_{13}^{(q)} & P_{14}^{(q)} \\ 0 & P_{22}^{(q)} & P_{23}^{(q)} & P_{24}^{(q)} \\ P_{31}^{(q)} & P_{32}^{(q)} & P_{33}^{(q)} & P_{34}^{(q)} \\ P_{41}^{(q)} & P_{42}^{(q)} & P_{43}^{(q)} & P_{44}^{(q)} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Поскольку вероятности перехода из состояния в состояние зависят от момента времени, то данная Марковская цепь является неоднородной.

В матрице (2) элементы $P_{kk}{}^{(q)},\ k=\overline{1,n}$ представляют собой вероятность того, что номер останется в текущем состоянии в следующий дискретный момент времени.

Особенностью матрицы $\mathbf{P}^{(q)}$ является то, что ее значения меняются в зависимости от сезона, а также времени суток, так, например, вероятность заселения клиента $P_{12}{}^{(q)}$ в ночное время крайне невелика, так же, как и вероятность перехода в состояние уборки $P_{i3}{}^{(q)},\ i=\overline{1,n}$ или в состояние ремонта $P_{i4}{}^{(q)},\ i=\overline{1,n}$ (исключение составляют вероятности перехода в туристический сезон, когда требуется срочно подготовить номер для заселения клиента независимо от времени суток).

Вероятности перехода можно связать с прибытием рейсов самолетов в аэропорт в городе, в котором моделируется работа ГК (или поездов с прибытием на вокзал). Тогда следующий дискретный момент времени может быть определен временем трансфера клиента от аэропорта (вокзала) до ГК после прибытия. В этом случае существует определенная вероятность изменения состояния номеров. В случайный момент времени вероятность заселения клиента стремится к нулю. Подобный подход будет иметь смысл, если рейсы осуществляются на регулярной основе с постоянным расписанием.

Вероятность нахождения системы в каждом из состояний в следующий дискретный момент времени с номером q вычисляется по формуле полной вероятности на основе матрицы вероятностей перехода

$$P_i(q) = \sum_{k=1}^{n} P_k(q-1) P_{ki}^{(q)},\ i = \overline{1,n}, \tag{3}$$

где $P_k(q-1)$ – вероятность нахождения системы в состоянии S_k в предыдущий дискретный момент времени $q-1$.

В соответствии с графом системы, представленным на рис. 2, можно записать уравнения для Марковской цепи дискретного времени

$$\begin{cases} P_1(q) = P_1(q-1)P_{11}^{(q)} + P_3(q-1)P_{31}^{(q)} + P_4(q-1)P_{41}^{(q)}; \\ P_2(q) = P_1(q-1)P_{12}^{(q)} + P_2(q-1)P_{22}^{(q)} + P_3(q-1)P_{32}^{(q)} + P_4(q-1)P_{42}^{(q)}; \\ P_3(q) = P_1(q-1)P_{13}^{(q)} + P_2(q-1)P_{23}^{(q)} + P_3(q-1)P_{33}^{(q)} + P_4(q-1)P_{43}^{(q)}; \\ P_4(q) = P_1(q-1)P_{14}^{(q)} + P_2(q-1)P_{24}^{(q)} + P_3(q-1)P_{34}^{(q)} + P_4(q-1)P_{44}^{(q)}. \end{cases} \tag{4}$$

Система уравнений дополняется уравнением

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(q) = 1. \tag{5}$$

Система уравнений (4), (5) полностью описывает процессы перехода номера из одного состояния в другое для дискретного времени.

3. Формирование модели Марковской цепи непрерывного времени

На основе графа состояний системы, представленного на рис. 1, можно сформировать также Марковскую цепь непрерывного времени.

Аналогом вероятности перехода $P_{ik}^{(q)}$ в случае непрерывного времени становится плотность вероятности перехода $\lambda_{ik}(t)$, определяемая по формуле

$$\lambda_{ik}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ij}^{(q)}(\Delta t)}{\Delta t}, \tag{6}$$

где Δt – малый интервал времени.

Формируемая Марковская цепь непрерывного времени является также неоднородной, поскольку плотность вероятности перехода (6) зависит от времени.

На рис. 3 представлен граф состояния для номера ГК в случае Марковской цепи непрерывного времени (на рис. 3 не показана зависимость плотности вероятности состояния от времени).

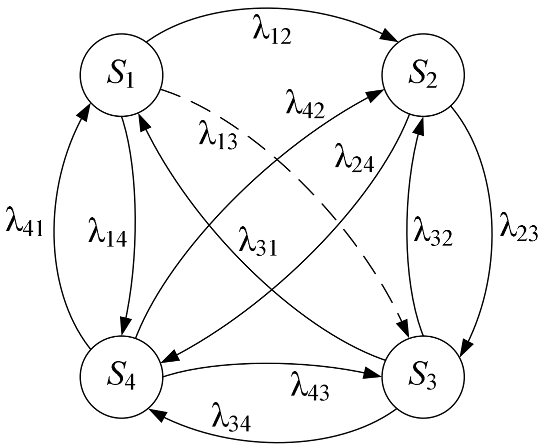

Рис. 3. Марковская цепь непрерывного времени, описывающая состояние номера ГК

На основе графа состояния на рис. 3 можно сформировать уравнения динамики вероятностей по Колмогорову – Чепмену, применяя правило сложения вероятностей [2, 3]

$$\begin{cases} \dot{P}_1(t) = \lambda_{31}(t)P_3(t) + \lambda_{41}(t)P_4(t) - \left(\lambda_{12}(t) + \lambda_{13}(t) + \lambda_{14}(t)\right)P_1(t); \\ \dot{P}_2(t) = \lambda_{12}(t)P_1(t) + \lambda_{32}(t)P_3(t) + \lambda_{42}(t)P_4(t) - \left(\lambda_{23}(t) + \lambda_{24}(t)\right)P_2(t); \\ \dot{P}_3(t) = \lambda_{13}(t)P_1(t) + \lambda_{23}(t)P_2(t) + \lambda_{43}(t)P_4(t) - \left(\lambda_{31}(t) + \lambda_{32}(t) + \lambda_{34}(\mathrm{t})\right)P_3(t); \\ \dot{P}_4(t) = \lambda_{14}(t)P_1(t) + \lambda_{24}(t)P_2(t) + \lambda_{34}(t)P_4(t) - \left(\lambda_{41}(t) + \lambda_{42}(t) + \lambda_{43}(\mathrm{t})\right)P_4(t). \end{cases} \tag{7}$$

По аналогии с Марковской цепью дискретного времени последняя система уравнений дополняется уравнением

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(t) = 1. \tag{8}$$

Данная система уравнений полностью описывает динамику вероятности нахождения номера ГК в одном из состояний.

На основе принципа квазирегулярности [3] можно также установить ограничение на пропускную способность обслуживающего персонала, например, в процессе уборки номеров ГК. Если количество номеров, требующих уборки, превышает количество уборщиц, то скорость уборки номеров (плотность вероятности перехода) будет ограничена скоростью обслуживания номеров.

4. Формирование модели функционирования номеров гостиницы на основе метода динамики средних

Как известно [3], системы, состоящие из большого количества однотипных элементов, удобно описывать при помощи метода динамики средних (МДС) на основе графа состояния одного элемента и уравнений Колмогорова – Чепмена для Марковской цепи непрерывного времени [2, 3]. Граф состояний одного элемента (одного номера ГК) представлен на рис. 4. Состояния элемента в соответствии с обозначениями на рис. 3 обозначены за ε_i, $i = \overline{1,n}$.

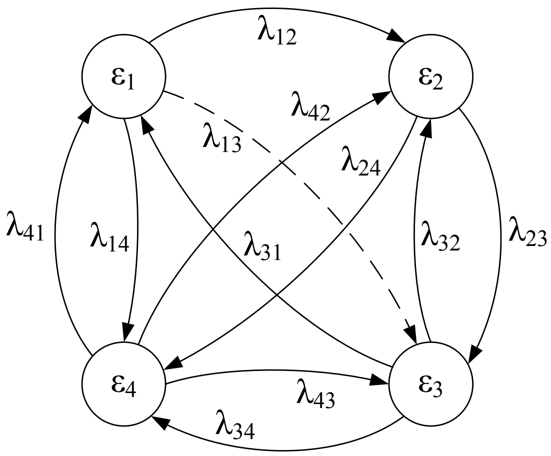

Рис. 4. Граф состояний одного элемента (номера ГК) для МДС

Умножая обе части системы уравнений Колмогорова – Чепмена на количество номеров N в данной категории, можно получить описание динамики средних численностей номеров, находящихся в каждом из состояний ε_i в виде математического ожидания $m_i(t),\ i=\overline{1,n}$.

$$\begin{cases} \dot{m}_1(t)=\lambda_{31}(t)m_3(t)+\lambda_{41}(t)m_4(t)-\left(\lambda_{12}(t)+\lambda_{13}(t)+\lambda_{14}(t)\right)m_1(t); \\ \dot{m}_2(t)=\lambda_{12}(t)m_1(t)+\lambda_{32}(t)m_3(t)+\lambda_{42}(t)m_4(t)-\left(\lambda_{23}(t)+\lambda_{24}(t)\right)m_2(t); \\ \dot{m}_3(t)=\lambda_{13}(t)m_1(t)+\lambda_{23}(t)m_2(t)+\lambda_{43}(t)m_4(t)-\left(\lambda_{31}(t)+\lambda_{32}(t)+\lambda_{34}(\mathrm{t})\right)m_3(t); \\ \dot{m}_4(t)=\lambda_{14}(t)m_1(t)+\lambda_{24}(t)m_2(t)+\lambda_{34}(t)m_4(t)-\left(\lambda_{41}(t)+\lambda_{42}(t)+\lambda_{43}(\mathrm{t})\right)m_4(t). \end{cases} \tag{9}$$

Данная система уравнений дополняется уравнением

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(t)=N\,. \tag{10}$$

Зная начальные численности номеров, находящихся в каждом из состояний, можно произвести оценку динамики численности номеров на основе системы уравнений (9), (10) с применением численных методов моделирования.

Таким образом, моделирование численности номеров одной конкретной категории в каждом из состояний можно осуществлять на основе системы дифференциальных уравнений четвертого порядка и одного алгебраического уравнения связи.

Поскольку, как правило, в ГК имеется более одной категории номеров, то для моделирования номеров всего ГК необходимо формирование систем уравнений для каждой из категорий по аналогии с (9), (10). Так, например, если ГК содержит номера категорий «туристический», «стандартный», «комфортный», «первый класс» и «люкс», то система дифференциальных уравнений при этом становится двадцатого порядка (пять категорий по четыре дифференциальных уравнения для каждой из них) и ее дополняют пять алгебраических уравнений связи.

Фактически каждая из систем уравнений, описывающих каждую из категорий номеров, является независимой от остальных систем. Коэффициенты плотности вероятности перехода $\lambda_{ik}(t)$ определяются отдельно для каждой из категорий. Моделирование в такой ситуации можно производить для системы по отдельности для каждой из категорий номеров, а не решать совместно систему дифференциальных уравнений двадцатого порядка.

Заключение

В данной статье получены новые модели Марковских процессов для описания состояния номерного фонда гостиничного комплекса. Описанный подход позволяет осуществлять оценку загруженности номерного фонда, как при насыщенном спросе, так и при ненасыщенном спросе на услуги гостиничного сектора. Развитием работы является исследование и формирование условий, накладываемых на плотности вероятности и вероятности перехода номеров из состояния в состояние и моделирование системы.

Список литературы

1. Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика. – М.: Издательский дом Вильямс, 2004. – 960 с.
2. Вентцель Е.С. Введение в исследование операций. – М.: Советское радио, 1967. – 390 с.
3. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Советское радио, 1972. – 552 с.
4. Воронов Е.М., Карпунин А.А., Ванин А.В. Оптимизация управления структурно сложными системами // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2013. – № 10. – 11 с. URL: http://engjournal.ru/catalog/it/nav/1080.html.
5. Соро Мамаду, Внуков А.А. Управление гостиничными бизнес-процессами с применением реляционного подхода // Вестник РУДН. Инженерные исследования. – 2013. – № 3. – С. 39–52.
6. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций: пер. с англ. – 7-е изд. – М.: Издательский дом Вильямс, 2005. – 912 с.

Рецензенты:

Беляев В.В., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой теоретической физики, ГОУ ВПО «Московский государственный областной университет», г. Москва.

Карпенко А.П., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой системы автоматизированного проектирования, ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва.