

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОДКРЕПЛЕННЫХ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ УЧЕТЕ ПОЛЗУЧЕСТИ МАТЕРИАЛА

Евтюков С.А.¹, Овчаров А.А.¹

¹ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет», Санкт-Петербург, Россия (196005, г. Санкт-Петербург, ул. 2-я Красноармейская, д. 4), e-mail: evtyukovs@gmail.com, ovcharov@compressor.spb.ru

В статье предлагается математическая модель деформирования конических оболочек с учетом возможности развития деформации ползучести при длительном нагружении. Математическая модель записана в виде функционала полной энергии деформации оболочки. Учитывается геометрическая нелинейность, дискретное расположение ребер, их сдвиговая и крутильная жесткость, поперечные сдвиги. Модель конической оболочки при учете ползучести материала, записанная в виде функционала полной энергии деформации оболочки, может быть исследована с использованием вариационного метода Ритца, т.е. для исследования устойчивости подкрепленных конических оболочек можно использовать методику, описанную в работе Овчарова А.А. Для исследования ползучести материала используется итерационный процесс.

Ключевые слова: конические оболочки, ползучесть материала, математическая модель, геометрическая нелинейность, ребристая оболочка.

MATHEMATICAL MODEL OF DEFORMATION ACCOMPANIED BY CONICAL SHELLS CONSIDERING CREEP OF A MATERIAL.

Evtukov S.A.¹, Ovcharov A.A.¹

¹RUSSIAN SEI HPE «Saint-Petersburg State University of architecture and civil engineering», St. Petersburg, Russia (196005, St. Petersburg, St. 2-ya Krasnoarmeyskaya, 4), e-mail: evtyukovs@gmail.com, ovcharov@compressor.spb.ru

The article proposes a mathematical model of deformation of conical shells with the possible development of long-term creep loading. Mathematical model of recorded as a functional of the total strain energy shell. Takes into account geometrical non-linearity, discrete rib arrangement of shear and torsion stiffness and lateral shifts. Conical shell model taking into account the creep of the material recorded in the form of the total energy functional deformation of the shell can be studied using the Ritz variational method, ie to investigate the stability reinforced conical shells, you can use the procedure described in the AA Ovtcharova To investigate the creep of the material used an iterative process.

Keywords: Cone shells, material creep, mathematical model, geometric non-linearity, ribbed shell.

Введение

Конические оболочечные конструкции находят большое применение в различных областях техники и могут подвергаться длительным механическим нагрузкам. При длительном нагружении в материале конструкции могут развиваться деформации ползучести [1; 4].

Поэтому расчеты прочности и устойчивости подкрепленных конических оболочек должны вестись с учетом возможности развития деформации ползучести.

Одной из первых работ по устойчивости конических оболочек была работа Х.М. Муштари (Муштари Х.М. Об устойчивости тонкостенных конических оболочек круглого сечения при кручении парами // Сборник научных трудов КАИ. – Казань : Издательство Казанского авиационного института, 1935. – С. 39–40). Кроме этого, следует отметить работу Муштари Х.М. и Саченкова А.В. (Муштари Х.М., Саченков А.В. Об устойчивости

цилиндрических и конических оболочек круглого сечения при совместном действии осевого сжатия и внешнего нормального давления // Прикладная математика и механика. - 1954. - Т. XVIII, № 6. - С. 667–674).

Следует отметить также работы Н.А. Алумяэ, Э.Н. Григолоюка, Х.М. Муштари, А.В. Саченкова, И.Н. Преображенского, Н.В Валишвили и др. В работе Валишвили Н.В. [2] исследуется устойчивость конических оболочек на основе осесимметричной теории. В работе Преображенского И.Н., Грищак В.З. [7] для исследования устойчивости конических оболочек используется упрощённая теория и получены оценки критической нагрузки.

Однако все исследования проводились в линейно-упругой постановке.

Цель исследования

Разработка математической модели деформирования конических оболочек при учете ползучести материала.

Материал и методы исследования

Схематичное изображение и принятая локальная система координат панели конической оболочки показаны на рисунке 1.

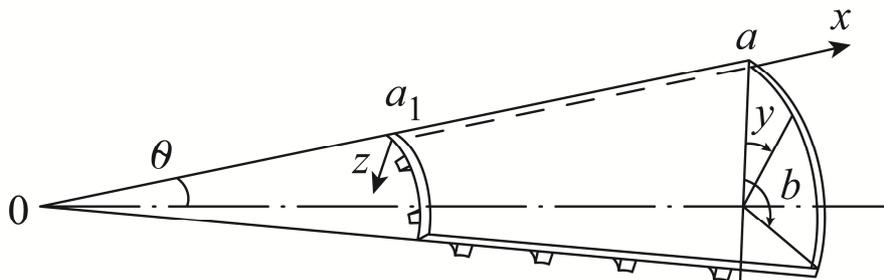


Рис. 1. Панель конической оболочки.

Для учета ползучести материала будем использовать линейную теорию наследственной ползучести.

Физические соотношения (связь напряжений и деформаций) для упругого изотропного материала оболочки будут иметь вид

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_x^z + \mu \epsilon_y^z); \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_y^z + \mu \epsilon_x^z); \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}^z; \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{yz}, \quad \tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xz}. \end{aligned} \quad (1)$$

Таким образом, физические соотношения для изотропного материала принимают вид

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} [\epsilon_x + \mu \epsilon_y + z(\chi_1 + \mu \chi_2)];$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} [\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x + z(\chi_2 + \mu\chi_1)]; \quad (2)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} [\gamma_{xy} + 2z\chi_{12}];$$

$$\tau_{xz} = \frac{Ekf(z)}{2(1+\mu)} (\psi_x - \theta_1); \quad \tau_{yz} = \frac{Ekf(z)}{2(1+\mu)} (\psi_y - \theta_2).$$

Физические соотношения при учете ползучести материала можно представить в виде

$$\sigma_x = \sigma_x^y - \sigma_x^c, \quad \sigma_y = \sigma_y^y - \sigma_y^c, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^y - \tau_{xy}^c,$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^y - \tau_{xz}^c, \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}^y - \tau_{yz}^c,$$

где $\sigma_x^y, \sigma_y^y, \tau_{xy}^y, \tau_{xz}^y, \tau_{yz}^y$ имеют вид (2), а напряжения, отражающие развитие деформаций ползучести, согласно линейной теории наследственности будут иметь вид

$$\sigma_x^c(t) = \frac{E}{1-\mu^2} \int_{t_0}^t [\varepsilon_x(\tau) + \mu\varepsilon_y(\tau) + z(\chi_1(\tau) + \mu\chi_2(\tau))] R_1(t, \tau) d\tau;$$

$$\sigma_y^c(t) = \frac{E}{1-\mu^2} \int_{t_0}^t [\varepsilon_y(\tau) + \mu\varepsilon_x(\tau) + z(\chi_2(\tau) + \mu\chi_1(\tau))] R_1(t, \tau) d\tau;$$

$$\tau_{xy}^c(t) = \frac{E}{2(1+\mu)} \int_{t_0}^t [\gamma_{xy}(\tau) + 2z\chi_{12}(\tau)] R_2(t, \tau) d\tau; \quad (3)$$

$$\tau_{xz}^c(t) = \frac{E}{2(1+\mu)} \int_{t_0}^t \gamma_{xz}(\tau) R_2(t, \tau) d\tau;$$

$$\tau_{yz}^c(t) = \frac{E}{2(1+\mu)} \int_{t_0}^t \gamma_{yz}(\tau) R_2(t, \tau) d\tau.$$

Если для решения задачи ползучести применяется итерационный процесс по координате t и отрезок $[t_0, t_k]$ разбит на части точками t_1, t_2, \dots, t_{k-1} с шагом $\Delta t = t_i - t_{i-1} = 1$ сутки, то приближенно можно принять

$$\sigma_x^c = \frac{E}{1-\mu^2} \sum_{i=1}^k (\varepsilon_x^z(t_{i-1}) + \mu\varepsilon_y^z(t_{i-1})) R1_{k,i-1};$$

$$\sigma_y^c = \frac{E}{1-\mu^2} \sum_{i=1}^k (\varepsilon_y^z(t_{i-1}) + \mu\varepsilon_x^z(t_{i-1})) R1_{k,i-1};$$

$$\tau_{xy}^c = \frac{E}{2(1+\mu)} \sum_{i=1}^k \gamma_{xy}^z(t_{i-1}) R2_{k,i-1};$$

$$\tau_{xz}^c = \frac{E}{2(1+\mu)} \sum_{i=1}^k \gamma_{xz}(t_{i-1}) R2_{k,i-1};$$

$$\tau_{yz}^c = \frac{E}{2(1+\mu)} \sum_{i=1}^k \gamma_{yz}(t_{i-1}) R2_{k,i-1},$$

где $R1_{k,i-1} = R_1(t_k, t_{i-1})\Delta t$, $R2_{k,i-1} = R_2(t_k, t_{i-1})\Delta t$.

Например, для оргстекла

$$R(t - \tau) = Ae^{-\beta(t-\tau)} \cdot (t - \tau)^{\alpha-1}$$

и тогда

$$R_{k,i-1} = Ae^{\beta(k-i+1)\Delta t} \cdot [(k-i+1)\Delta t]^{\alpha-1} \cdot \Delta t.$$

Математическая модель деформирования конических оболочек представляет собой функционал полной энергии деформации оболочки, который при учете ползучести материала имеет вид

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_y - \mathfrak{E}_c. \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_y = & \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_{a_1}^a \int_0^b \left[(h + \bar{F}) (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\mu \varepsilon_x \varepsilon_y + \mu_1 \gamma_{xy}^2 + \frac{5}{6} \mu_1 \left(\psi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{5}{6} \mu_1 \left(\psi_y + \frac{1}{x \sin \theta} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\text{ctg} \theta}{x} V \right)^2 \right] + 2\bar{S} (\chi_1 \varepsilon_x + \chi_2 \varepsilon_y + \mu \chi_2 \varepsilon_x + \mu \chi_1 \varepsilon_y + 2\mu_1 \gamma_{xy} \chi_{12}) + \\ & \left. + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_1^2 + \chi_2^2 + 2\mu \chi_1 \chi_2 + 4\mu_1 \chi_{12}^2) - 2(1-\mu^2) \frac{q}{E} W \right] x \sin \theta dx dy, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\mu_1 = \frac{1-\mu}{2}$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_c(t_k) = & \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_{a_1}^a \int_0^b 2 \{ \varepsilon_x(t_k) \sum_{i=1}^k \left[(h + \bar{F}) (\varepsilon_x(t_{i-1}) + \mu \varepsilon_y(t_{i-1})) + \bar{S} (\chi_1(t_{i-1}) + \mu \chi_2(t_{i-1})) \right] \bar{R}_1 + \\ & + \chi_1(t_k) \sum_{i=1}^k \left[\bar{S} (\varepsilon_x(t_{i-1}) + \mu \varepsilon_y(t_{i-1})) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_1(t_{i-1}) + \mu \chi_2(t_{i-1})) \right] \bar{R}_1 + \\ & + \varepsilon_y(t_k) \sum_{i=1}^k \left[(h + \bar{F}) (\varepsilon_y(t_{i-1}) + \mu \varepsilon_x(t_{i-1})) + \bar{S} (\chi_2(t_{i-1}) + \mu \chi_1(t_{i-1})) \right] \bar{R}_1 + \\ & + \chi_2(t_k) \sum_{i=1}^k \left[\bar{S} (\varepsilon_y(t_{i-1}) + \mu \varepsilon_x(t_{i-1})) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_2(t_{i-1}) + \mu \chi_1(t_{i-1})) \right] \bar{R}_1 + \\ & + \mu_1 \gamma_{xy}(t_k) \sum_{i=1}^k \left[(h + \bar{F}) \gamma_{xy}(t_{i-1}) + 2\bar{S} \chi_{12}(t_{i-1}) \right] \bar{R}_2 + \\ & + 2\mu_1 \chi_{12}(t_k) \sum_{i=1}^k \left[\bar{S} \gamma_{xy}(t_{i-1}) + 2 \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \chi_{12}(t_{i-1}) \right] \bar{R}_2 + \\ & + k \mu_1 \left(\psi_x(t_k) + \frac{\partial W}{\partial x}(t_k) \right) \sum_{i=1}^k \left(h + \bar{F} \right) \left(\psi_x(t_{i-1}) + \frac{\partial W}{\partial x}(t_{i-1}) \right) \bar{R}_2 + \\ & + k \mu_1 \left(\psi_y(t_k) + \frac{1}{x \sin \theta} \frac{\partial W}{\partial y}(t_k) + \frac{\text{ctg} \theta}{x} V(t_k) \right) \times \\ & \times \sum_{i=1}^k \left(h + \bar{F} \right) \left(\psi_y(t_{i-1}) + \frac{1}{x \sin \theta} \frac{\partial W}{\partial y}(t_{i-1}) + \frac{\text{ctg} \theta}{x} V(t_{i-1}) \right) \bar{R}_2 \left. \right\} x \sin \theta dx dy. \end{aligned} \quad (6)$$

Функционал (4) с учетом (5), (6) вместе с краевыми условиями представляет собой математическую модель деформирования конической оболочки при учете ползучести

материала, в которой учитывается геометрическая нелинейность, дискретное введение ребер с учетом их сдвиговой и крутильной жесткости, поперечных сдвигов.

В выражениях (5), (6) $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ – деформации в координатной поверхности оболочки, за которую принята срединная поверхность обшивки [6], для конической оболочки они принимают вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{x \sin(\theta)} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{U - W \operatorname{ctg}(\theta)}{x} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x \sin(\theta)} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\operatorname{ctg}(\theta)}{x} V \right)^2; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{x \sin(\theta)} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{V}{x} + \frac{\partial W}{\partial x} \left(\frac{1}{x \sin(\theta)} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\operatorname{ctg}(\theta)}{x} V \right).\end{aligned}$$

Здесь U, V, W – перемещения точек координатной поверхности вдоль осей x, y, z ; Ψ_x, Ψ_y – функции, характеризующие поперечные сдвиги в соответствующих плоскостях; E, μ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала; q – составляющая поперечной нагрузки; h – толщина оболочки; a_1, a, b – предельные значения координат x, y ; $\chi_1, \chi_2, \chi_{12}$ – функции изменения кривизны и кручения [6]:

$$\begin{aligned}\chi_1 &= \frac{\partial \Psi_x}{\partial x}; \quad \chi_2 = \frac{1}{x \sin(\theta)} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{\Psi_x}{x}; \\ 2 \chi_{12} &= \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} + \frac{1}{x \sin(\theta)} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} - \frac{\Psi_y}{x}.\end{aligned}$$

Переменными $\bar{F}, \bar{S}, \bar{J}$ обозначены функции, выражающие площадь поперечного или продольного сечения ребер, приходящуюся на единицу длины сечения, статический момент и момент инерции этого сечения:

$$\bar{F} = \int_{h/2}^{h/2+H} dz = H; \quad \bar{S} = \int_{h/2}^{h/2+H} z dz = \frac{H(h+H)}{2}; \quad \bar{J} = \int_{h/2}^{h/2+H} z^2 dz = 0,25h^2H + 0,5hH^2 + \frac{1}{3}H^3.$$

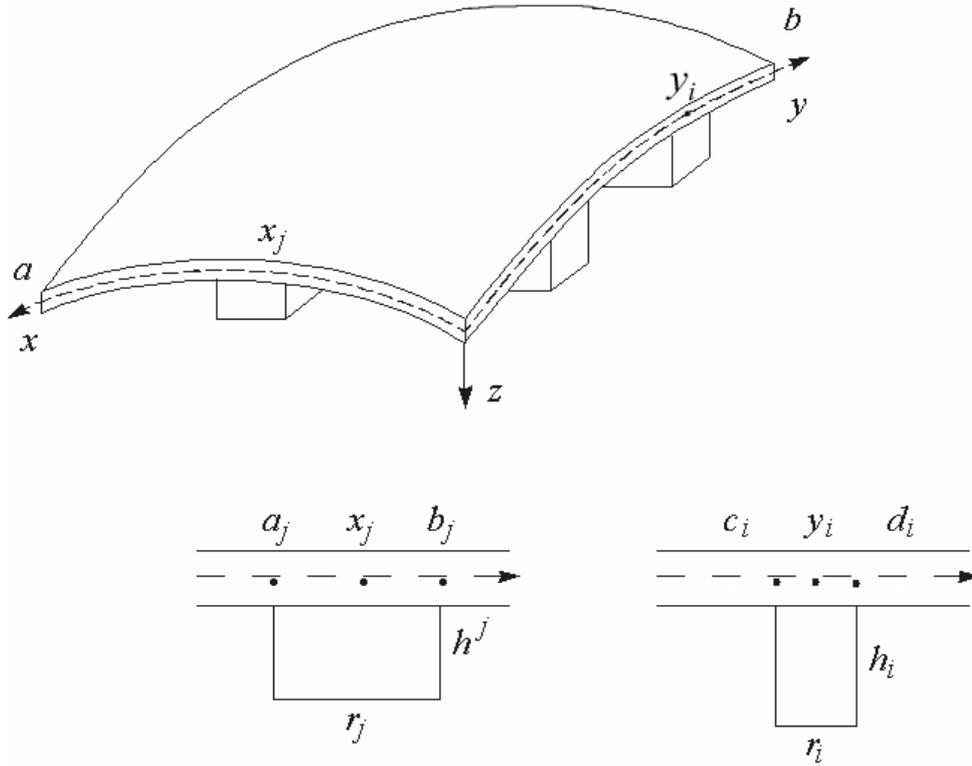


Рис. 2. Схема подкрепления оболочки ребрами жесткости.

Высота и расположение ребер задается функцией

$$H(x, y) = \sum_{j=1}^m h^j \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n h^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i),$$

где h^i, h^j – высота ребер, параллельных осям y и x соответственно; $h^{ij} = \min\{h^i, h^j\}$; $\bar{\delta}(x - x_j)$, $\bar{\delta}(y - y_i)$ – единичные столбчатые функции, равные единице в местах присоединения ребер и равные нулю вне таких мест. Контакт ребра и обшивки происходит по полосе.

В развернутом виде \bar{F} , \bar{S} , \bar{J} принимают вид [3]

$$\bar{F} = \sum_{j=1}^m F^j \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n F^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i);$$

$$\bar{S} = \sum_{j=1}^m S^j \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n S^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m S^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i);$$

$$\bar{J} = \sum_{j=1}^m J^j \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n J^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m J^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i),$$

где, например,

$$F^j = h^j; \quad S^j = \frac{h^j(h + h^j)}{2};$$

$$J^j = 0,25h^2h^j + 0,5h(h^j)^2 + \frac{1}{3}(h^j)^3.$$

Ребра, параллельные оси y (j -е ребра), расположены при $a_j \leq x \leq b_j$, а ребра, параллельные оси x (i -е ребра), расположены при $c_i \leq y \leq d_i$. Причем

$$a_j = x_j - \frac{\tilde{r}_j}{2}, b_j = x_j + \frac{\tilde{r}_j}{2}, c_i = y_i - \frac{\tilde{r}_i}{2}, d_i = y_i + \frac{\tilde{r}_i}{2}.$$

$$\text{Здесь } \tilde{r}_j = \frac{r_j}{A}, \tilde{r}_i = \frac{r_i}{B}.$$

Так как $A = \text{const}, B = B(x)$, то a_j, b_j константы. Чтобы i -е ребра были одной ширины при любом x

$$c_i = c_i(x), d_i = d_i(x).$$

Заключение

Таким образом, модель конической оболочки при учете ползучести материала, записанная в виде функционала полной энергии деформации оболочки, может быть исследована с использованием вариационного метода Ритца, т.е. для исследования устойчивости подкрепленных конических оболочек можно использовать методику, описанную в работе [5]. Для исследования ползучести материала используется итерационный процесс.

Список литературы

1. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М. : Высшая школа, 1968. – 512 с.
2. Валишвили Н.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. - М. : Машиностроение, 1976. – 278 с.
3. Карпов В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. – Ч. 1. - 288 с.
4. Карпов В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения : в 2 ч. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2011. – Ч. 2. Вычислительный эксперимент при статическом механическом воздействии. - 248 с.
5. Овчаров А.А. Компьютерные технологии исследования устойчивости панелей ребристых конических оболочек // Вестник гражданских инженеров. - СПб. : СПбГАСУ. – 2007. - Вып. 2 (11). – С. 104–111.

6. Овчаров А.А. Математическая модель конической оболочки ступенчато-переменной толщины при динамическом нагружении // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ : межвуз. темат. сб. тр. - СПб. : СПбГАСУ, 2004. – С. 127–132.
7. Преображенский И.Н., Грищак В.З. Устойчивость и колебания конических оболочек. – М. : Машиностроение, 1986. – 240 с.

Рецензенты:

Ушаков А.И., д.т.н., профессор научно-производственного информационно-консультационного центра – плюс, г. Санкт-Петербург.

Максимов С.Е., д.т.н., профессор, генеральный директор научно-производственной компании «НТМТ», Ленинградская обл., г. Гатчина.