

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНО УПРУГИХ ПОДКРЕПЛЕННЫХ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Овчаров А.А.<sup>1</sup>, Брылев И.С.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет», Санкт-Петербург, Россия (196005, Санкт-Петербург, ул. 2-я Красноармейская, д.4), e-mail: [ovcharov@compressor.spb.ru](mailto:ovcharov@compressor.spb.ru); [ilya2104@mail.ru](mailto:ilya2104@mail.ru)

Конические оболочечные конструкции находят большое применение в ракетостроении, самолетостроении, судостроении, автомобилестроении и строительстве. Для придания большей жесткости тонкостенная часть оболочки подкрепляется ребрами, при этом незначительное увеличение веса конструкции существенно повышает ее прочность, даже если ребра имеют малую высоту. Подавляющее большинство работ, посвященных изучению динамики ребристых оболочек, выполнено с использованием расчетной схемы, основанной на прикладной теории оболочек Кирхгофа–Лява и теории стержней Кирхгофа–Клебша. В некоторых работах использована теория оболочек типа Тимошенко, и лишь в работе Галиева Ш.У. – уравнения пространственной задачи теории упругости. К сожалению, области применимости результатов, полученных на основе прикладных теорий, в большинстве случаев не оговариваются, и вопрос о достоверности результатов, полученных с помощью этих теорий, в особенности при решении нестационарных задач, остается открытым. В наиболее общем виде построены уравнения движения ребристых цилиндрических оболочек.

Ключевые слова: конические оболочки, математическая модель, геометрическая нелинейность, физическая нелинейность.

## MATHEMATICAL MODEL OF DEFORMATION OF NONLINEAR ELASTIC REINFORCED CONICAL SHELLS UNDER DYNAMIC LOADING

Ovcharov A.A.,<sup>1</sup> Brylev I.S.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>RUSSIAN SEI HPE «Saint-Petersburg State University of architecture and civil engineering», St. Petersburg, Russia (196005, St. Petersburg, St. 2-ya Krasnoarmeyskaya, 4), e-mail: [ovcharov@compressor.spb.ru](mailto:ovcharov@compressor.spb.ru); [ilya2104@mail.ru](mailto:ilya2104@mail.ru)

Conical shell constructions are of great use in missile, aircraft, shipbuilding, automotive and construction. To give greater rigidity is reinforced by a thin-walled shell portion edges, with a slight increase in weight of the construction substantially increases its strength, even if the ribs are small height. The vast majority of studies on the dynamics of ribbed shells, performed using a computational scheme based on the application of the theory of shells and the Kirchhoff-Love theory of rods Kirchhoff - Clebsch. Some studies used the theory of shells Timoshenko type, and only in the Galiyev Sh.U. - Equation spatial problem of elasticity. Unfortunately, the range of applicability of the results obtained on the basis of applied theories, in most cases, not specified, and the question of the reliability of the results obtained by these theories, especially in nonstationary problems remains open. In the most general form of the equations of motion are constructed of ribbed cylindrical shells.

Keywords: conical shell, mathematical model, geometric nonlinearity, physical nonlinearity.

### Введение

Конические оболочечные конструкции находят большое применение в ракетостроении, самолетостроении, судостроении, автомобилестроении и строительстве [7]. Для придания большей жесткости тонкостенная часть оболочки подкрепляется ребрами, при этом незначительное увеличение веса конструкции существенно повышает ее прочность, даже если ребра имеют малую высоту.

Подавляющее большинство работ, посвященных изучению динамики ребристых оболочек, выполнено с использованием расчетной схемы, основанной на прикладной теории

оболочек Кирхгофа–Лява [2–4, 6, 9] и теории стержней Кирхгофа–Клебша. В некоторых работах использована теория оболочек типа Тимошенко, и лишь в работе [5] – уравнения пространственной задачи теории упругости. К сожалению, области применимости результатов, полученных на основе прикладных теорий, в большинстве случаев не оговариваются, и вопрос о достоверности результатов, полученных с помощью этих теорий, в особенности при решении нестационарных задач, остается открытым.

В наиболее общем виде построены уравнения движения ребристых цилиндрических оболочек [1, 8].

В работах [11, 12] были получены уравнения движения для подкрепленных ребрами жесткости конических оболочек при линейно-упругом деформировании с учетом поперечных сдвигов. Однако при исследовании устойчивости оболочек в динамической постановке при нагрузках, близких к критическим, могут проявиться пластические деформации.

#### **Цель исследования**

Разработка математической модели деформирования конических оболочек с учетом геометрической и физической нелинейности при динамическом нагружении.

#### **Материал и методы исследования**

Будем рассматривать математические модели классической теории оболочек, основанной на определенных гипотезах (существуют и другие теории оболочек, например, асимптотическая).

Полная совокупность соотношений, характеризующих деформирование оболочек, состоит из трех групп. К первой группе относятся соотношения между деформациями и перемещениями оболочки (геометрические соотношения). Эти соотношения зависят от геометрии оболочек (цилиндрические, конические, сферические и т. д.). Если допускаются малые перемещения, то эти соотношения линейные. Если оболочка допускает прогибы, соизмеримые с ее толщиной, то эти соотношения нелинейные. Таким образом, учитывается геометрическая нелинейность. Ко второй группе относятся соотношения, связывающие напряжения и деформации (физические соотношения). Эти соотношения зависят от того, какие свойства материала конструкции учитываются (упругие, пластические, свойства ползучести и т. д.). Проявление тех или иных свойств материала зависит от уровня внешних воздействий и их длительности. К третьей группе относятся уравнения равновесия (движения) или функционал полной энергии деформации, который представляет сумму работ внутренних и внешних сил и из условия минимума которого получаются уравнения равновесия (движения). Все эти зависимости вместе с краевыми условиями (условиями

закрепления краев оболочки) образуют замкнутую систему, в которой число неизвестных равно числу уравнений, и составляют математическую модель деформирования оболочки.

Для круговой конической оболочки с углом конусности  $\theta$  параметры Ляме принимают вид  $A = 1$ ,  $B = x \sin \theta$ , кривизны –  $k_x = 0$ ,  $k_y = \frac{\text{ctg}(\theta)}{x}$ , так как  $dS_1 = 1 \cdot dx$ ,  $dS_2 = MO_2 dy = x \sin \theta dy$ ,  $R_1 = \infty$ ,  $R_2 = MO_1 = x \text{tg} \theta$ . Принимаемая система координат показана на рис. 1.

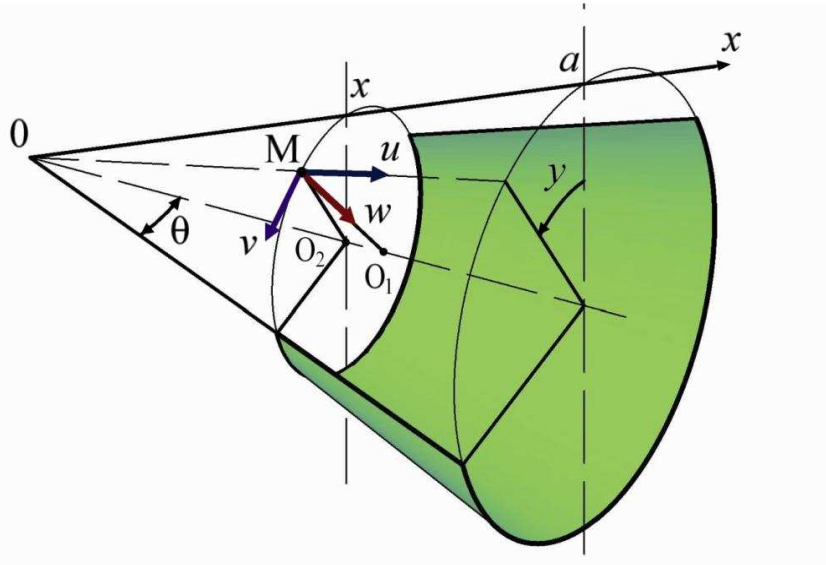


Рис. 1. Круговая коническая оболочка

Деформации в срединной (координатной) поверхности принимают вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{x \sin(\theta)} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{U - W \text{ctg}(\theta)}{x} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x \sin(\theta)} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\text{ctg}(\theta)}{x} V \right)^2; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{x \sin(\theta)} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{V}{x} + \frac{\partial W}{\partial x} \left( \frac{1}{x \sin(\theta)} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\text{ctg}(\theta)}{x} V \right); \\ \gamma_{xz} &= k f(z) \left[ \psi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \right]; \\ \gamma_{yz} &= k f(z) \left[ \psi_y + \left( \frac{1}{x \sin(\theta)} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\text{ctg}(\theta)}{x} V \right) \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Функции изменения кривизн  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  и кручения  $\chi_{12}$  принимают вид:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{\partial \psi_x}{\partial x}; \quad \chi_2 = \frac{1}{x \sin(\theta)} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\psi_x}{x}; \\ 2\chi_{12} &= \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{1}{x \sin(\theta)} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{\psi_y}{x}. \end{aligned}$$

Выражения  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  здесь принимают вид:

$$\theta_1 = -\frac{\partial W}{\partial x}; \quad \theta_2 = -\left(\frac{1}{x \sin(\theta)} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\text{ctg}(\theta)}{x} V\right).$$

Физические соотношения (связь напряжений и деформаций) для упругого изотропного материала оболочки будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x^z + \mu\varepsilon_y^z); \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y^z + \mu\varepsilon_x^z); \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}^z; \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{yz}, \quad \tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xz}. \end{aligned} \quad (2)$$

Таким образом, физические соотношения для изотропного материала принимают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}[\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y + z(\chi_1 + \mu\chi_2)]; \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}[\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x + z(\chi_2 + \mu\chi_1)]; \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)}[\gamma_{xy} + 2z\chi_{12}]; \\ \tau_{xz} &= \frac{E k f(z)}{2(1+\mu)}(\psi_x - \theta_1); \quad \tau_{yz} = \frac{E k f(z)}{2(1+\mu)}(\psi_y - \theta_2). \end{aligned} \quad (3)$$

Для учета пластических деформаций будем использовать деформационную теорию пластичности, при этом секущий модуль упругости принимаем в виде, предложенном А. А. Ильюшиным:

$$E_C = E(1 - \omega(\varepsilon_i)).$$

Таким образом, физические соотношения могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^y - \sigma_x^\Pi, \quad \sigma_y = \sigma_y^y - \sigma_y^\Pi, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^y - \tau_{xy}^\Pi, \\ \tau_{xz} &= \tau_{xz}^y - \tau_{xz}^\Pi, \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}^y - \tau_{yz}^\Pi, \end{aligned}$$

где  $\sigma_x^y, \sigma_y^y, \tau_{xy}^y, \tau_{xz}^y, \tau_{yz}^y$  имеют вид (3), а составляющие напряжений  $\sigma_x^\Pi, \sigma_y^\Pi, \tau_{xy}^\Pi, \tau_{xz}^\Pi, \tau_{yz}^\Pi$  записываются в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_x^\Pi &= \frac{E}{1-\mu^2} \omega(\varepsilon_i) [\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y + z(\chi_1 + \mu\chi_2)]; \\ \sigma_y^\Pi &= \frac{E}{1-\mu^2} \omega(\varepsilon_i) [\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x + z(\chi_2 + \mu\chi_1)]; \\ \tau_{xy}^\Pi &= \frac{E}{2(1+\mu)} \omega(\varepsilon_i) [\gamma_{xy} + 2z\chi_{12}]; \\ \tau_{xz}^\Pi &= \frac{E}{2(1+\mu)} \omega(\varepsilon_i) \gamma_{xz}; \quad \tau_{yz}^\Pi = \frac{E}{2(1+\mu)} \omega(\varepsilon_i) \gamma_{yz}. \end{aligned} \quad (4)$$

При использовании для решения физически-нелинейных задач метода упругих решений А.А. Ильюшина на каждой итерации  $\omega(\epsilon_i)$  считается известной величиной.

Функция  $\omega(\epsilon_i)$  для различных материалов принимает различный вид, а  $\epsilon_i$  имеет вид:

$$\epsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\epsilon_x^z)^2 + \epsilon_x^z \epsilon_y^z + (\epsilon_y^z)^2 + \frac{1}{4}((\gamma_{xy}^z)^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)}.$$

Будем считать, что на оболочку действует поперечная нагрузка  $q(x, y, t)$ . Значит, искомые функции перемещений  $U, V, W$  и углов поворота нормали  $\psi_x, \psi_y$  будут функциями трех переменных  $x, y$  и  $t$ .

Функционал полной энергии деформации оболочки имеет вид:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (K - \Pi + A) dt, \quad (5)$$

где  $K$  – кинетическая энергия системы,  $\Pi$  – потенциальная энергия системы,  $A$  – работа внешних сил. При учете физической нелинейности потенциальная энергия системы будет иметь вид [12]:

$$\Pi = \Pi_{\pi} - \Pi_{\eta}.$$

В функционале (5)

$$K = \frac{\rho}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2+H} [(\dot{U}^z)^2 + (\dot{V}^z)^2 + (\dot{W}^z)^2] x \sin \theta dx dy dz = \quad (6)$$

$$= \frac{\rho}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b [(h + \bar{F})(\dot{U}^2 + \dot{V}^2 + \dot{W}^2) + 2\bar{S}(\dot{U}\dot{\psi}_x + \dot{V}\dot{\psi}_y) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J}\right)(\dot{\psi}_x^2 + \dot{\psi}_y^2)] x \sin \theta dx dy;$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\pi} - A = & \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_{a_1}^a \int_0^b [(h + \bar{F})(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\mu\epsilon_x\epsilon_y + \mu_1\gamma_{xy}^2 + \frac{5}{6}\mu_1\left(\psi_x + \frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \\ & + \frac{5}{6}\mu_1\left(\psi_y + \frac{1}{x \sin \theta} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\text{ctg } \theta}{x} V\right)^2) + 2\bar{S}(\chi_1\epsilon_x + \chi_2\epsilon_y + \mu\chi_2\epsilon_x + \mu\chi_1\epsilon_y + 2\mu_1\gamma_{xy}\chi_{12}) + \\ & + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J}\right)(\chi_1^2 + \chi_2^2 + 2\mu\chi_1\chi_2 + 4\mu_1\chi_{12}^2) - 2(1-\mu^2)\frac{q}{E}W] x \sin \theta dx dy, \quad (7) \end{aligned}$$

где  $\mu_1 = \frac{1-\mu}{2}$ .

$$\begin{aligned} \Pi_{\eta} = & \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_{a_1}^a \int_0^b \{ \epsilon_x [I_1(\epsilon_x + \mu\epsilon_y) + I_2(\chi_1 + \mu\chi_2)] + \chi_1 [I_2(\epsilon_x + \mu\epsilon_y) + I_3(\chi_1 + \mu\chi_2)] + \\ & + \epsilon_y [I_1(\epsilon_y + \mu\epsilon_x) + I_2(\chi_2 + \mu\chi_1)] + \chi_2 [I_2(\epsilon_y + \mu\epsilon_x) + I_3(\chi_2 + \mu\chi_1)] + \\ & + \mu_1\gamma_{xy} [I_1\gamma_{xy} + 2I_2\chi_{12}] + 2\mu_1\chi_{12} [I_2\gamma_{xy} + 2I_3\chi_{12}] + \\ & + \mu_1 k^2 I_4 (\psi_x - \theta_1)^2 + \mu_1 k^2 I_4 (\psi_y - \theta_2)^2 \} x \sin \theta dx dy. \quad (8) \end{aligned}$$

В выражении (6),  $\rho = \frac{\gamma}{g}$  – плотность материала оболочки, точками обозначены производные по переменной  $t$ .

$$I_k = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+H} \omega(\varepsilon_i) z^{k-1} dz, \quad k = 1, 2, 3.$$

Для разных материалов используют различную аппроксимацию  $\omega(\varepsilon_i)$ , например,

$$\omega(\varepsilon_i) = A\varepsilon_i^k \quad (0 < k < 1);$$

$$\omega(\varepsilon_i) = m\varepsilon_i^2;$$

$$\omega(\varepsilon_i) = \left(1 - \frac{E_T}{E}\right) \left(1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_i}\right) \text{ при } \varepsilon_i > \varepsilon_T \quad (\omega(\varepsilon_i) = 0 \text{ при } \varepsilon_i \leq \varepsilon_T)$$

и другие. Аппроксимация секущего модуля  $E_c = E(1 - m\varepsilon_i^2)$  может быть использована, например, для таких материалов, как сталь ХГ, сталь Р9, сплав 765.

Высота и расположение ребер задается функцией:

$$H(x, y) = \sum_{j=1}^m h^j \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n h^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i),$$

где  $h^i, h^j$  – высота ребер параллельных осям  $y$  и  $x$  соответственно;  $h^{ij} = \min\{h^i, h^j\}$ ;  $\bar{\delta}(x - x_j)$ ,  $\bar{\delta}(y - y_i)$  – единичные столбчатые функции, равные единице в местах присоединения ребер и равные нулю вне таких мест. Контакт ребра и обшивки происходит по полосе.

Таким образом, толщина всей конструкции равна  $h + H$ . Если  $H > 0$ , то оболочка подкреплена ребрами или накладками, а если  $H < 0$ , то она ослаблена вырезами;

$$\bar{F} = \int_{h/2}^{h/2+H} dz = H; \quad \bar{S} = \int_{h/2}^{h/2+H} z dz = \frac{H(h+H)}{2}; \quad \bar{J} = \int_{h/2}^{h/2+H} z^2 dz = 0,25h^2H + 0,5hH^2 + \frac{1}{3}H^3.$$

Выражение для  $\omega(\varepsilon_i)$  представим в виде:

$$\omega(\varepsilon_i) = \frac{4m}{3} (b_1 + b_2 z + b_3 z^2),$$

где

$$b_1 = \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2;$$

$$b_2 = 2\varepsilon_x \chi_1 + 2\varepsilon_y \chi_2 + \varepsilon_x \chi_2 + \varepsilon_y \chi_1 + \gamma_{xy} \chi_{12};$$

$$b_3 = \chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_1 \chi_2 + \chi_{12}^2.$$

Так как

$$I_k = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+H} \omega(\varepsilon_i) z^{k-1} dz,$$

то

$$I_1 = \frac{4m}{3} \left[ (h + \bar{F})b_1 + \bar{S}b_2 + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) b_3 \right];$$

$$I_2 = \frac{4m}{3} \left[ \bar{S}b_1 + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) b_2 + \bar{K}b_3 \right];$$

$$I_3 = \frac{4m}{3} \left[ \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) b_1 + \bar{K}b_2 + \left( \frac{h^5}{80} + \bar{M} \right) b_3 \right],$$

Для металла, не имеющего площадки текучести,  $m$  принимает значение от  $10^3$  до  $10^5$  и вычисляется эмпирически.

### **Заключение**

Функционал (5), с учетом (6), (7), (8), вместе с краевыми и начальными условиями представляет собой математическую модель деформирования конической оболочки при динамическом нагружении, в которой учитывается геометрическая и физическая нелинейности, дискретное введение ребер с учетом их сдвиговой и крутильной жесткости, а также поперечных сдвигов.

Панели усеченных конических оболочек зачастую используются в машиностроении, самолетостроении, автомобилестроении [7], при этом на конструкцию действуют именно динамические нагрузки. Полученная математическая модель позволяет исследовать не только напряженно-деформированное состояние конических оболочек, но и свободные и вынужденные колебания.

### **Список литературы**

1. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Методы расчета оболочек. Т. 2. Теория ребристых оболочек. – Киев: Наукова думка, 1980. – 368 с.
2. Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Поляков П.С. Ребристые цилиндрические оболочки. – Киев: Наукова думка, 1973. – 248 с.
3. Валишвили Н.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М.: Машиностроение, 1976. – 278 с.
4. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
5. Галиев Ш.У. Напряженное состояние периодически подкрепленного полого цилиндра при действии подводной волны // ДАН УССР. Сер. А. – 1976. – № 4. – С. 325–329.
6. Диамант Г.И., Заруцкий В.А., Сивак Э.Ф. Исследование влияния ребер на собственные частоты и формы колебаний цилиндрических оболочек // Строительная механика и расчет сооружений. – 1978. – № 3. – С. 48–50.

7. Евтюков С.А., Брылев И.С. Обзор существующих методик расчета скорости двухколесных транспортных средств // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 6.
8. Жигалко Ю.П. Некоторые вопросы динамики подкрепленных оболочек // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1979. – Вып. 14. – С. 172–184.
9. Заруцкий В.А., Мацнер В.И. Устойчивость ребристых цилиндрических оболочек при импульсном нагружении // Применение численных методов в строительной механике корабля. – Л.: Судостроение, 1976. – С. 63–67.
10. Карпов В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. Ч. 1. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 288 с.
11. Овчаров А.А. Математическая модель конической оболочки ступенчато-переменной толщины при динамическом нагружении // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: Межвуз. темат. сб. тр. СПбГАСУ. – СПб., 2004. – С. 127–132.
12. Овчаров А.А. Компьютерные технологии исследования устойчивости панелей ребристых конических оболочек // Вестник гражданских инженеров, СПб., СПб ГАСУ, вып. 2(11), 2007. – С. 104–111.

**Рецензенты:**

Ушаков А.И., д.т.н., профессор научно-производственного информационно-консультационного центра – плюс, г. Санкт-Петербург.

Максимов С.Е., д.т.н., профессор, генеральный директор научно-производственной компании «НТМТ», Ленинградская обл., г. Гатчина.