УДК 539.1.01

ОБ ЭНТРОПИИ КВАНТОВОГО ПЕРЕПУТЫВАНИЯ У ГОРИЗОНТА ЧЕРНОЙ ДЫРЫ И КОНФОРМНОЙ СИММЕТРИИ

Фурсаев Д.В.

Международный университет "Дубна", РФ, Московская область, 141980, г. Дубна, ул. Университетская 19
e-mail: fursaev@theor.jinr.ru

Показано, что энтропия квантового перепутывания квантовых возбуждений вблизи горизонта черной дыры может быть получена методами конформной теории поля. Идея состоит в том, что подсчет энтропии за счет размерной редукции сводится к эквивалентной задаче на пространстве двумерной черной дыры. Конформная симметрия в системе отсчета наблюдателей, находящихся в состоянии покоя вблизи горизонта, возникает за счет того, что полевые возбуждения являются эффективно безмассовыми. Основное наблюдение работы состоит в том, что вырождение определенных генераторов алгебры Вирасоро двумерных конформных преобразований может быть подсчитано универсальным образом по так называемой формуле Карди. Вырождение определяется исключительно средним значением соответствующего генератора и центральным зарядом алгебры. В работе показано, как использовать формулу Карди для воспроизведения тепловой энтропии квантов вблизи горизонта. Использован также другой известный факт, что редуцированная матрица плотности, связанная с потерей информации под горизонтом, в состоянии Хартла-Хокинга имеет тепловой характер. Полученный результат дает потенциальную возможность связать две интерпретации энтропии Бекенштейна-Хокинга: интерпретацию, основанную на квантовом перепутывании, и интерпретацию, основанную на использовании конформной симметрии состояний у горизонта.

Ключевые слова: квантовое перепутывание, черные дыры, конформная теория поля

A NOTE ON ENTANGLEMENT ENTROPY NEAR BLACK HOLE HORIZON AND CONFORMAL SYMMETRY

Fursaev D.V.

Dubna International University, Universitetskaya str. 19, 141980, Dubna, Moscow Region, Russia, e-mail: fursaev@theor.jinr.ru

It is pointed out that the entanglement entropy of quantum fields near the horizon of a black hole can be derived by means of a conformal field theory. The idea is to use for the computation of the entropy a dimensional reduction. This allows one to come to an equivalent problem on a space-time of a two-dimensional black hole. Conformal symmetry appears in a reference frame of observers which are at rest with respect to the horizon as a result of the fact that field excitations are effectively massless. The key observation of the paper is that the degeneracy of certain generators of the Virasoro algebra of two-dimensional conformal transformations can be calculated by a universal method on the base of the Cardy formula. The degeneracy is determined only by an average value of the corresponding generator and by a central charge. We show how the Crady formula can be used to reproduce a thermal entropy of quanta near the horizon. We also use another known property: the reduced density matrix related to an information loss under the horizon is a thermal density matrix in the Hartle-Hawking state. A potential importance of our result is that it allows one to connect two interpretations of the Bekenstein-Hawking entropy, one interpretation which is based on a quantum entanglement and another interpretation which makes use of the conformal symmetries in the near horizon region.

Keywords: quantum entanglement, black holes, conformal field theory

В последнее десятилетие огромный интерес теоретических исследований в области гравитации был связан с ролью конформных симметрий, которые возникают на многообразиях, являющихся асимптотически многообразиями с геометрией анти-де Ситтера [1–3]. Классические конформные симметрии фонового многообразия фактически определяют тип дуальной квантовой теории поля, возникающей на границе пространства. Роль конформных симметрий также оказывается важна для подсчета состояний некоторого типа 3-мерных черных дыр [4, 5], и, возможно, имеет ключевое значение для объяснения энтропии физических черных дыр [6].

Цель настоящей работы – обратить внимание на роль конформной симметрии при подсчете энтропии квантового перепутывания квантовых возбуждений на горизонте черной дыры. Для простоты мы рассмотрим случай сферически-симметричных статических черных дыр (решения Шварцшильда или Рейснера-Нордстрема). За счет сферической симметрии любую полевую теорию на данных многообразиях можно редуцировать (в духе Калузы-Кляйна) к "башне" двумерных теорий поля. Поля в каждой такой двумерной теории распространяются только в радиальном направлении. Вблизи горизонта поля являются эффективно безмассовыми, и поэтому обладают двумерной конформной инвариантностью. Отметим, что на значение конформных симметрий при подсчете энтропии перепутывания впервые было обращено внимание в работе [8].

Для того, чтобы продемонстрировать безмассовый характер полевых возбуждений вблизи горизонта, рассмотрим двумерную часть статической метрики

$$ds^2 = -q(x)dt^2 + q^{-1}(x)dx^2, \quad x_h < x < x_b, \tag{1}$$

где координаты x_h и x_b соответствуют положениям горизонта и границы пространства. На горизонте $q(x_h) = 0$. Для неэкстремальной черной дыры производная $q'(x_h)$ не обращается в ноль, и можно определить константу поверхностной гравитации $k = q'(x_h)/2$. Рассмотрим далее в качестве примера скалярное поле ϕ на пространстве-времени с метрикой (1). Уравнение для поля имеет следующий вид:

$$\left(-\nabla^2 + \xi R + m^2\right)\phi(x) = 0. \tag{2}$$

Это уравнение сводится к релятивистскому аналогу уравнения Шрёдингера для волновых функций одночастичных полевых возбуждений ϕ_ω с частотой ω. Производя в уравнении (2) подстановку $\phi(t,x) = \exp(-i\omega t)\phi_\omega(x)$, приходим к следующей задаче:

$$\overline{H}^2\phi_\omega = \omega^2\phi_\omega, \tag{3}$$

$$\overline{H}^2 = -\partial_y^2 + q\left(\xi R + m^2\right), \tag{4}$$

где координаты y и x связаны соотношением $dy = dx/q$. Как следует из (4), всеми массовыми слагаемыми можно пренебречь из-за наличия множителя q. Поэтому одночастичный оператор энергии $\overline{H}$ есть просто $\sqrt{-\partial_y^2}$. Аналогичное свойство справедливо для других полей (электромагнитного поля и поля Дирака), см. [9]. Фактически $\overline{H}$ вблизи горизонта оказывается гамильтонианом одночастичных возбуждений на ультрастатическом пространстве с метрикой

$$d\bar{s}^2 = -dt^2 + dy^2, \qquad (5)$$

которая связана с исходной метрикой (1) конформным преобразованием. В (5) положение горизонта отображается на бесконечность, поэтому мы имеем дело с полями, распространяющимися на неограниченном пространстве. Тепловая энтропия таких полей имеет инфракрасную расходимость. Делая размер системы конечным и равным l, можно легко найти свободную энергию F, энергию E и энтропию S квантов при некоторой температуре β^{-1}

$$F = -\frac{\pi}{6\beta^2} l, \qquad E = \frac{\pi}{6\beta^2} l, \qquad S = \frac{\pi}{3\beta} l \quad . \qquad (6)$$

Конечный размер l эквивалентен введению обрезания вблизи горизонта на некотором собственном расстоянии ε. Причина, по которой от обсуждения энтропии перепутывания мы перешли к обсуждению тепловой энтропии, проста. Энтропия перепутывания связана с потерей информации о квантах, распространяющихся внутри горизонта. Важно, что редуцированная матрица плотности, возникающая при интегрировании по состояниям внутри черной дыры имеет тепловой характер с температурой Хокинга. Поэтому расчет энтропии перепутывания совпадает с вычислением соответствующей тепловой энтропии. Для того, чтобы найти соотношение между параметрами l и ε, метрику (1) нужно представить в другой форме:

$$ds^2 = e^{-\varphi}\left(-\kappa^2\rho^2 dt^2 + d\rho^2\right). \qquad (7)$$

При малых ε

$$l = \frac{1}{k}\left(-\frac{1}{2}\varphi_h + \ln\frac{\rho_b}{\varepsilon}\right), \qquad (8)$$

где φ_h – значение конформного фактора на горизонте, а ρ_b граничное значение ρ. Энтропия перепутывания, отвечающая вакуумному состоянию Хартла-Хокинга вычисляется при температуре Хокинга $\beta_H^{-1} = k/(2\pi)$. Для безмассовых полей величина S в (6) дает точный (в лидирующем приближении) результат для энтропии.

Покажем теперь, как получить тот же результат используя конформную симметрию. Будем считать, что имеется N безмассовых скалярных полей, тогда в лидирующем приближении

$$E = N\frac{\pi}{6\beta^2} l, \qquad S = N\frac{\pi}{3\beta} l \quad . \qquad (9)$$

Соответствующая конформная теория поля вблизи горизонта характеризуется центральным зарядом $c = N$, см. [7]. Центральный заряд определяет коммутационные соотношения алгебры Вирасоро конформной группы. Связь между гамильтонианом системы и генераторами алгебры Вирасоро можно установить, представляя метрику (5) в следующем виде:

$$d\bar{s}^2 = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \left(-d\eta^2 + dz^2\right) = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 du d\upsilon, \tag{10}$$

$$u = \frac{z+\eta}{2}, \quad \upsilon = \frac{z-\eta}{2}. \tag{11}$$

Следовательно,

$$\partial_t = \frac{\pi}{2l}\left(\partial_u - \partial_\upsilon\right). \tag{12}$$

Отметим, что в (10) координата z пробегает значения от 0 до π. Этот отвечает теории на интервале, где точки $z=0$ и $z=\pi$ являются независимыми. Для того, чтобы провести вычисления, удобно перейти к теории, где z является периодической координатой. Это можно сделать, рассматривая две идентичные независимые конформные теории на интервале длиной π, "склеивая" концы интервалов и образуя окружность, так что из двух теорий возникает одна (с областью изменения координаты z от 0 до 2π).

Теперь имеется две копии алгебры Вирасоро со стандартно определенными элементами L_n и $\bar{L}_n$ в качестве генераторов координатных преобразований, $\delta u = e^{inu}$ и $\delta\upsilon = e^{in\upsilon}$, соответственно. Согласно соотношению (12) гамильтониан системы H, который является генератором сдвигов по времени t, представляется в виде:

$$H = \frac{\pi}{2l}\left(L_0 - \bar{L}_0\right). \tag{13}$$

Схожим образом, сдвиги системы вдоль координаты y генерируются оператором импульса

$$P = \frac{\pi}{2l}\left(L_0 + \bar{L}_0\right). \tag{14}$$

Поскольку система находится в покое, среднее значение импульса равно нулю. С другой стороны, среднее значение H совпадает с энергией E, см. (9). Эти условия фиксируют средние значения h и $\bar{h}$ операторов L_0 и $\bar{L}_0$, соответственно. В данном квантовом состоянии

$$h = -\bar{h} = \frac{N}{6}\frac{l^2}{\beta^2}. \tag{15}$$

В пределе, когда l велико (ε мало), получаем, что $h >> 1$. В этом случае можно использовать так называемую формулу Карди, чтобы вычислить вырождение L_0 и $\bar{L}_0$. В рассматриваемом приближении полное вырождение D есть

$$\ln D = 2\pi\sqrt{\frac{ch}{6}} + 2\pi\sqrt{\frac{c\left|\bar{h}\right|}{6}} \tag{16}$$

и, учитывая, что в нашем случае $c = N$, находим

$$\ln D = 2N\frac{\pi}{3}\frac{l}{\beta}. \tag{17}$$

Теперь необходимо учесть, что D является числом состояний системы с удвоенным гильбертовым пространством, которое получилось в результате периодизации координаты *z*. Подлинное число степеней свободы, которое нас интересует равно $\sqrt{D}$. Для энтропии это дает величину

$$S = \frac{1}{2}\ln D, \tag{18}$$

которая в точности совпадает с требуемым значением (9). Чтобы получить энтропию перепутывания в состоянии Хартла-Хокинга, в (18) необходимо положить $\beta = \beta_H$.

Таким образом, на примере упрощенной модели мы показали, что конформная симметрия вблизи горизонта играет важную роль в подсчете степеней свободы черной дыры (если микроскопическое происхождение энтропии Бекенштейна-Хокинга действительно связано с потерей информации внутри горизонта). Дальнейшее исследование проблемы энтропии черной дыры на основе данной симметрии требует отождествления самих степеней свободы и более точного описания их свойств.

Список литературы

1. Banados M., Teitelboim C., Zanelli J. Black hole in three-dimensional spacetime // Physical Review Letters. – 1992. – Vol. 69. – №. 13. – P. 1849.
2. Carlip S. Black hole entropy from conformal field theory in any dimension // Physical Review Letters. – 1999. – Vol. 82. – №. 14. – P. 2828.
3. Frolov V. P., Fursaev D. V. Thermal fields, entropy and black holes // Classical and Quantum Gravity. – 1998. – Vil. 15. – №. 8. – P. 2041.
4. Gubser S. S., Klebanov I. R., Polyakov A. M. Gauge theory correlators from non-critical string theory // Physics Letters B. – 1998. – Vol. 428. – №. 1. – P. 105-114.
5. Holzhey C., Larsen F., Wilczek F. Geometric and renormalized entropy in conformal field theory // Nuclear Physics B. – 1994. – Vol. 424. – №. 3. – P. 443-467.
6. Maldacena J. The large N limit of superconformal field theories and supergravity // Advances in Theoretical and Mathematical Physics. – 1998**.** **–** Vol. 2. – №. 2. – P. 231 – 252

7. Polyakov A.M. Gauge Fields and Strings. – Chur, Switzerland : Harwood Academic Publishers, 1987. – 301 p.
8. Strominger A. Black hole entropy from near-horizon microstates // Journal of High Energy Physics. – 1998. – Vol. 1998. – № 02. – P. 009.
9. Witten E. Anti-de Sitter space and holography // Advances in Theoretical and Mathematical Physics. – 1998. – Vol. 2. – P. 253 – 291

Рецензенты:

Исаев А.П., д.ф.-м.н., профессор, заместитель директора Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований, г.Дубна.

Казаков Д.И., д.ф.-м.н, главный научный сотрудник Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований, г. Дубна.